



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 1

Conceitos Básicos, Bipolos e Quadripolos

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

CURSO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Volume 1

- 1. Conceitos Básicos, Bipolos e Quadripolos**
- 2. Associações de Bipolos e Leis de Kirchhoff**
- 3. A Análise Nodal e suas Variantes; Análise de Malhas**
- 4. Redução de Redes e Aplicações Tecnológicas de Redes Resistivas**
- 5. Estudo de Redes de Primeira Ordem**
- 6. Estudo de Redes de Segunda Ordem**
- 7. Introdução à Transformação de Laplace**
- 8. Transformação de Laplace e Funções de Rede**

ENGENHARIA
ELÉTRICA



INFORMAÇÃO
ENERGIA

A Engenharia Elétrica visa essencialmente
prover

RECURSOS

materiais, dispositivos

processos físicos e

químicos

MÉTODOS

análise e síntese

para promover:

- Produção
- Transmissão
- Distribuição
- Armazenagem
- Transformação
- Processamento

de ENERGIA e INFORMAÇÃO

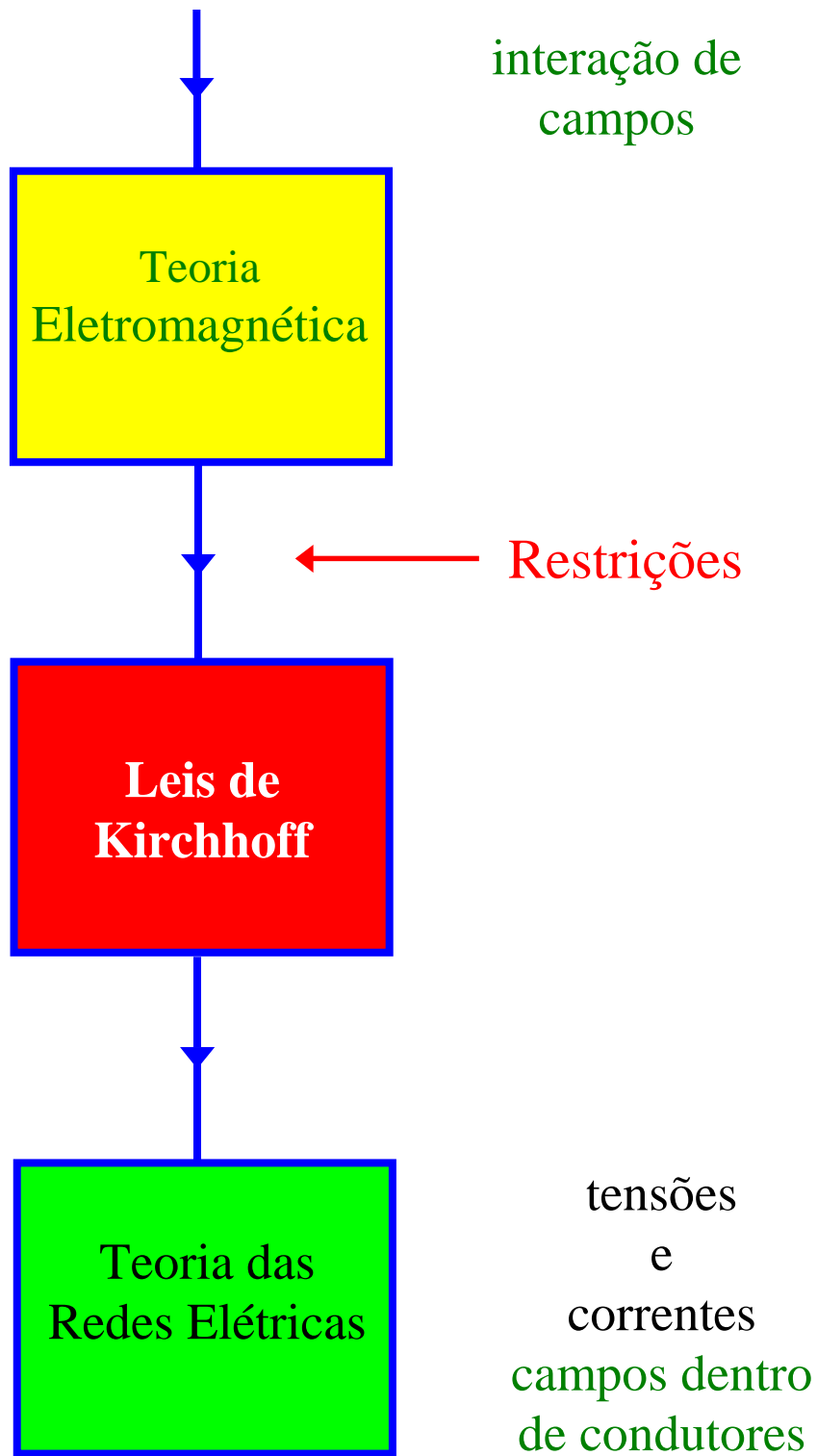
Engenharia Elétrica



Aplicações práticas de fenômenos
eletromagnéticos

Eletromagnetismo

- Oersted 1820
- Gauss / Ampère ~ 1825
- Faraday - Henry 1831
- Siemens ~ 1850
- Maxwell 1864
- Hertz 1888
- Landell de Moura 1894
- Marconi 1901



Eletromag x Circuitos

Teoria Clássica de Eletromagnetismo



Equações de Maxwell



Leis que relacionam campos elétricos e magnéticos



grandezas vetoriais



Métodos de solução complicados → aproximações

Teoria Clássica de Circuitos



Leis de Kirchhoff



Relações entre tensões e correntes em elementos simples
ideais: R L C



grandezas escalares



Métodos de solução bem estabelecidos

Exemplos

a) Rede de distribuição de energia
Elétrica: 60 Hz

5ª harmônica: 300 Hz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300} = 10^6 \text{ metros}$$

Sistema contido em um raio de 10 km



Vale a Teoria dos Circuitos

b) Receptor FM: 100 MHz

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ metros}$$

$$\lambda/4 = 0,75 \text{ m}$$

Dimensões do circuito << 75 cm

TABELA DE UNIDADES

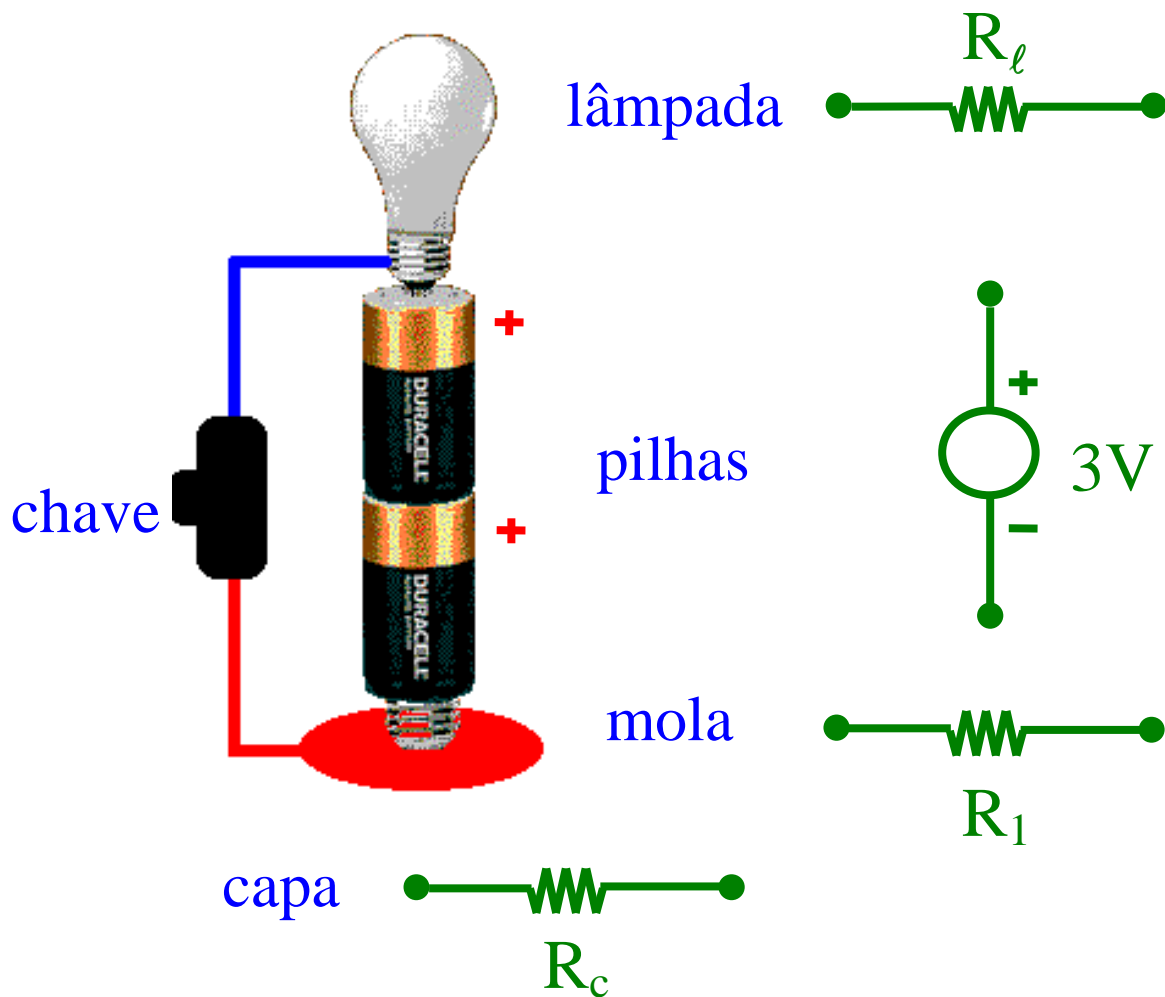
GRANDEZA	SISTEMAS CONSISTENTES			
	S.I.	A.F.	R.F.	U.H.F.
Tensão	V	V	V	V
Corrente	A	mA	mA	mA
Resistência	Ω	k Ω	k Ω	k Ω
Condutância	S	mS	mS	mS
Capacitância	F	μ F	nF	pF
Indutância	H	H	mH	μ H
Tempo	s	ms	μ s	ns
Freq. angular	rad/s	krad/s	Mrad/s	Grad/s
Frequência	Hz	kHz	MHz	GHz

T	Tera	10^{12}
G	Giga	10^9
M	Mega	10^6
k	Quilo	10^3
m	Mili	10^{-3}
μ	Micro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}
p	Pico	10^{-12}

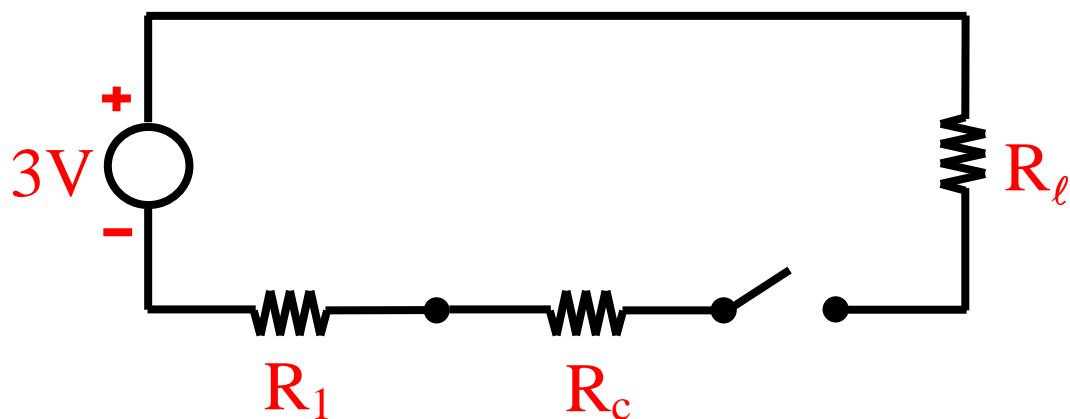
SISTEMAS DE UNIDADES CONSISTENTES			
GRANDEZA	S.I.	ÁUDIO FREQ.	RÁDIO FREQ.
Tempo	seg	mseg	μseg
Frequência	Hz	kHz	MHz
Tensão	V	V	V
Corrente	A	mA	mA
Resistência	Ω	kΩ	kΩ
Condutância	S	mS	mS
Capacitância	F	μF	nF
Indutância	H	H	mH

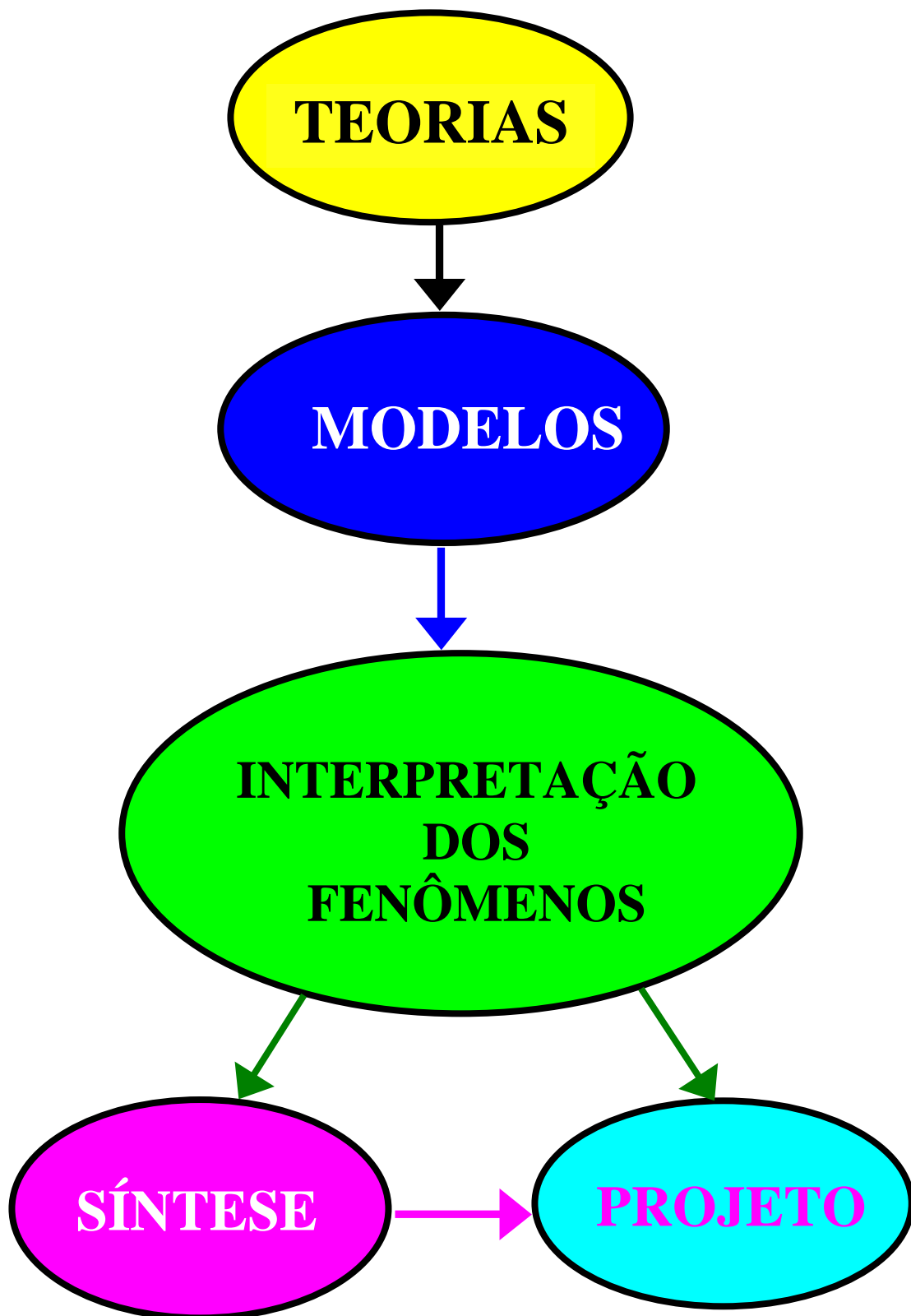
MODELAMENTO

Lanterna:



Modelo :





CIRCUITOS ELÉTRICOS I :

CONCEITOS BÁSICOS:

- CARGA ELÉTRICA $q(t)$:

Múltiplo inteiro de $1,602 \cdot 10^{-19}$ coulombs

- CORRENTE ELÉTRICA ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE:

- VALOR MÉDIO:

$$i_m = \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} \quad (\text{AMPÈRES})$$

- VALOR INSTANTÂNEO:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (\text{AMPÈRES})$$

Carga elétrica

- Conservativa
- Quantizada $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Bipolar \oplus \ominus
Atração e Repulsão
- Móvel ou Fixa
- Materiais: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Condutores} \\ \text{Semi-condutores} \\ \text{Isolantes} \end{array} \right.$

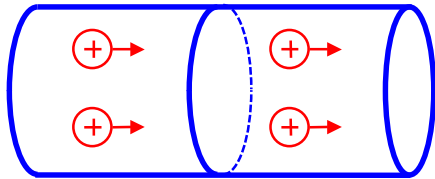
Corrente Elétrica (física)

- Condução lâmpada incandescente
- Convecção íons em eletrólitos \rightarrow luz néon
- Difusão semicondutores
- Deslocamento dielétricos

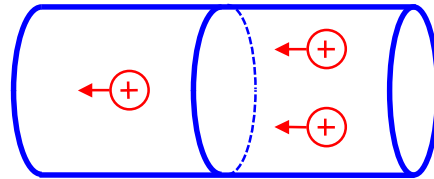
$$i(t) \triangleq dq/dt$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + q(t_0)$$

CORRENTE ELÉTRICA



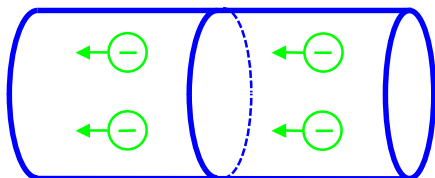
$+ Q_1$



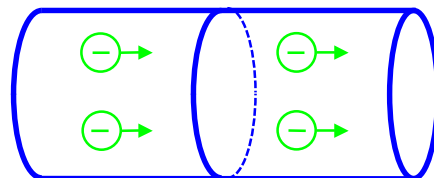
$- Q_2$



Sentido de Referência



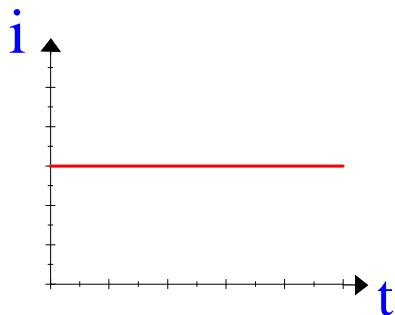
$+ Q_3$



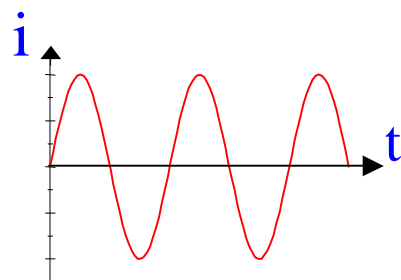
$- Q_4$

$$i_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{+Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4}{\Delta t}$$

FORMAS DE ONDA

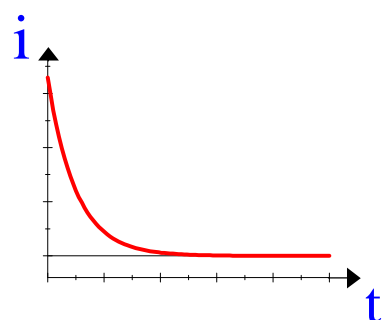


Contínua CC
DC

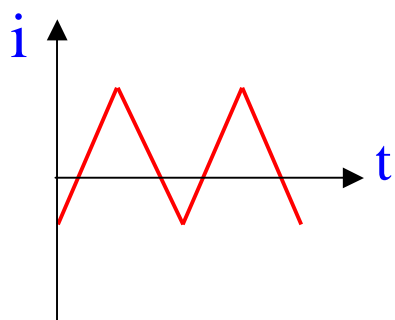


Alternativa CA
AC

Ex.: senoidal
- Periódica, média
nula num período

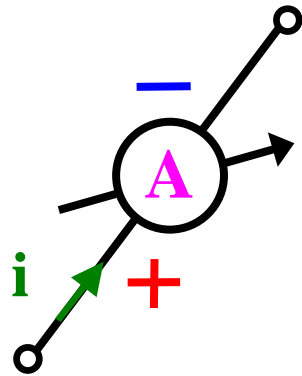


Não-periódica
Ex.: exponencial



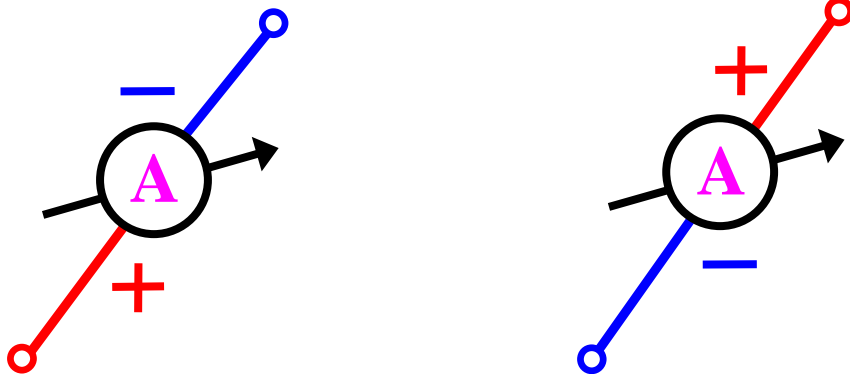
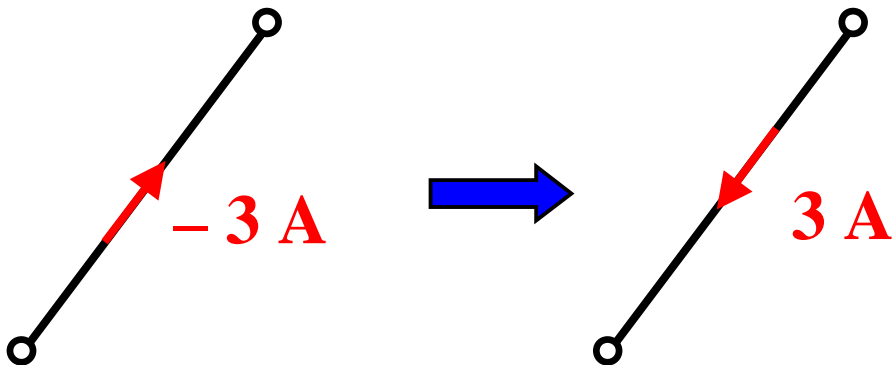
Pulsada
Ex.: triangular

Aparelho para medir corrente elétrica

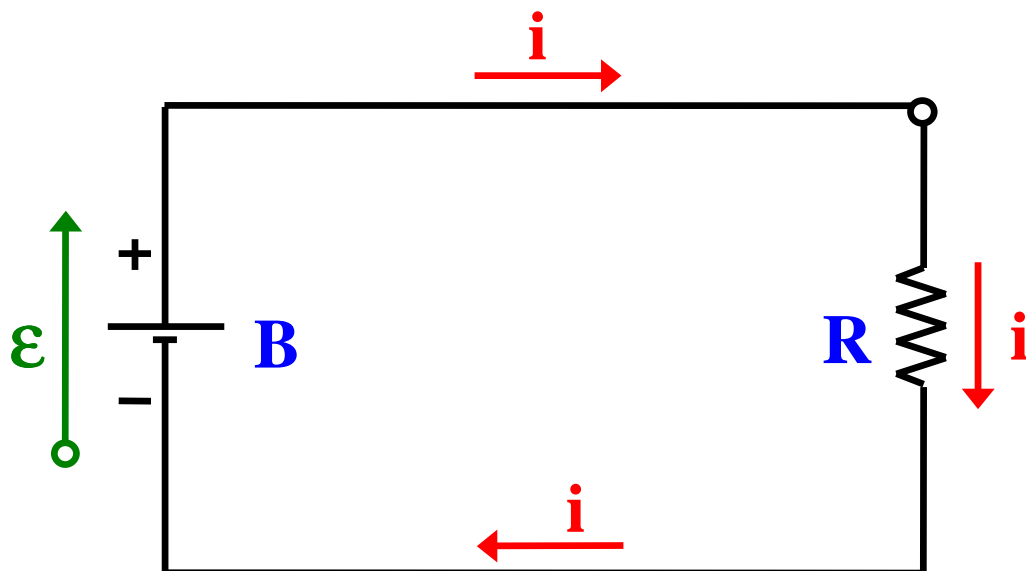


Amperímetro
Ideal

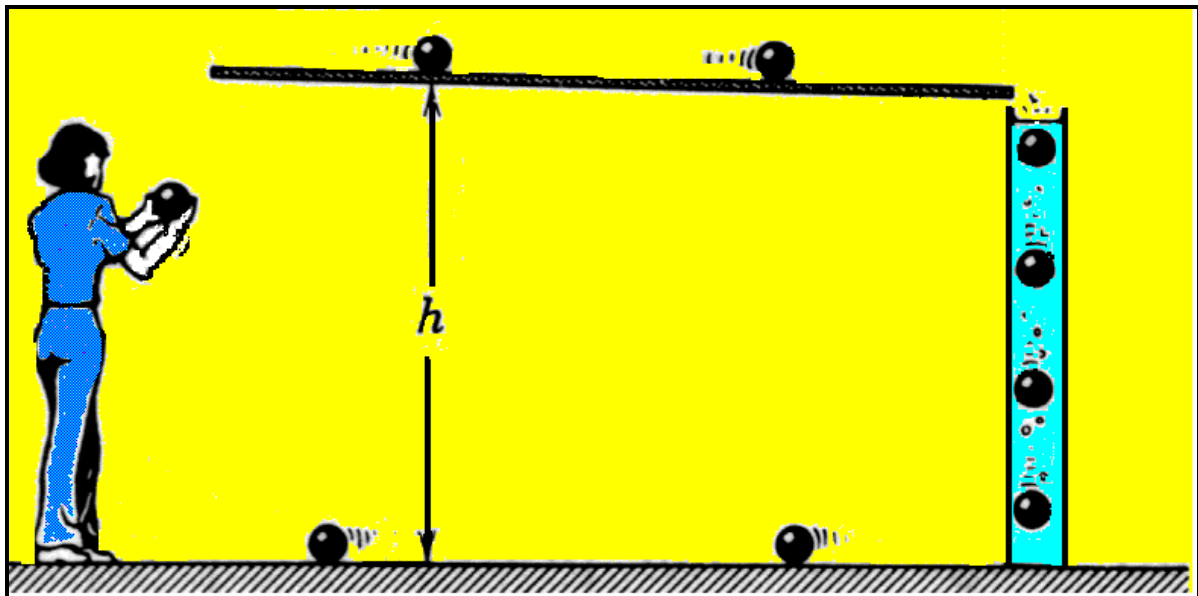
→ curto-circuito



CONCEITO DE TENSÃO ELÉTRICA (ddp)



a) Circuito elétrico



b) Analogia mecânica

Tensão Elétrica

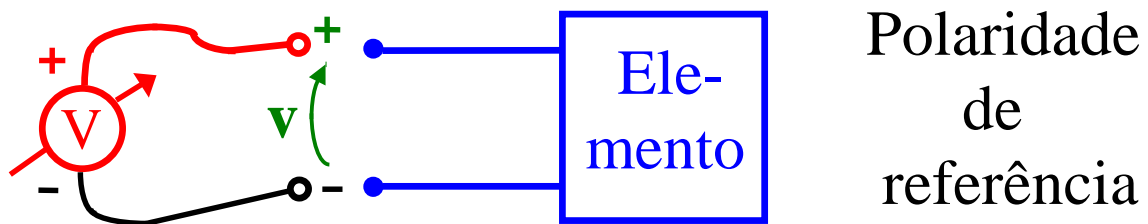
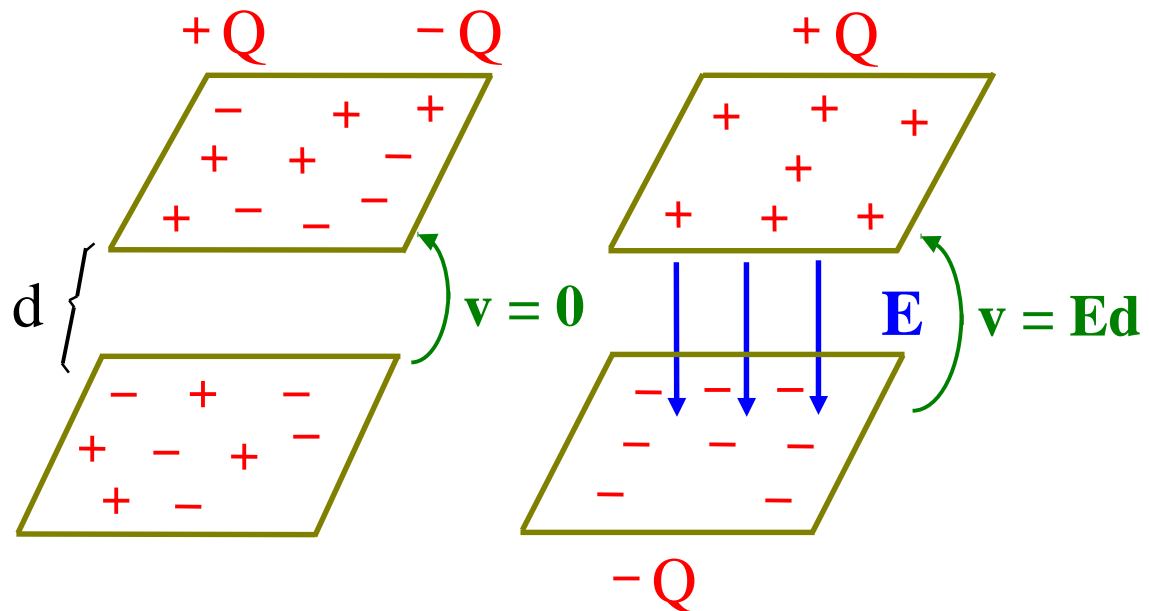
$$d w(t) = v(t) dq(t)$$

$d w(t) \rightarrow$ energia (trabalho) necessária
para separar cargas positivas
de cargas negativas (J)

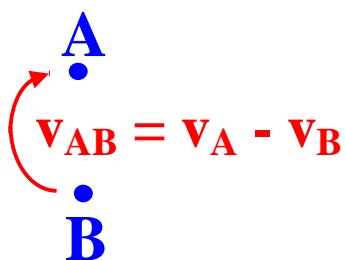
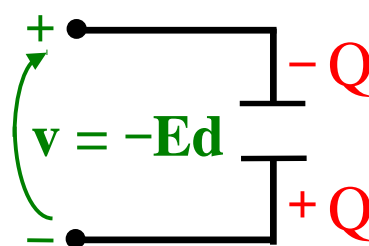
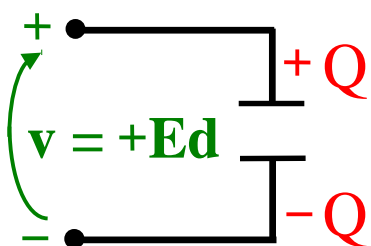
$dq(t) \rightarrow$ quantidade de carga a ser
separada (C)

$v(t) \rightarrow$ tensão elétrica (V)

Tensão Elétrica



Polaridade de referência



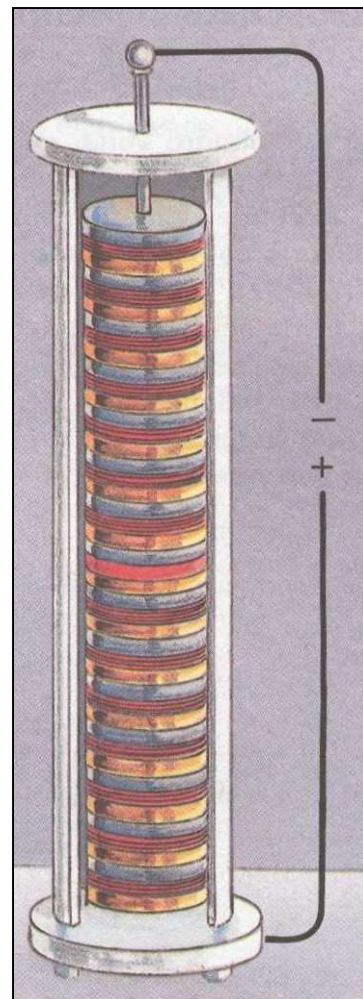
FONTES DE TENSÃO

- Ação Química Baterias, Pilhas
- Magnetismo Geradores
- Luz → Fotoeletricidade Célula Solar
- Calor → Termo-eletricidade
 Par termoelétrico
- Pressão Mecânica → Piezoeletricidade
 Cristal piezoelétrico
- Fricção

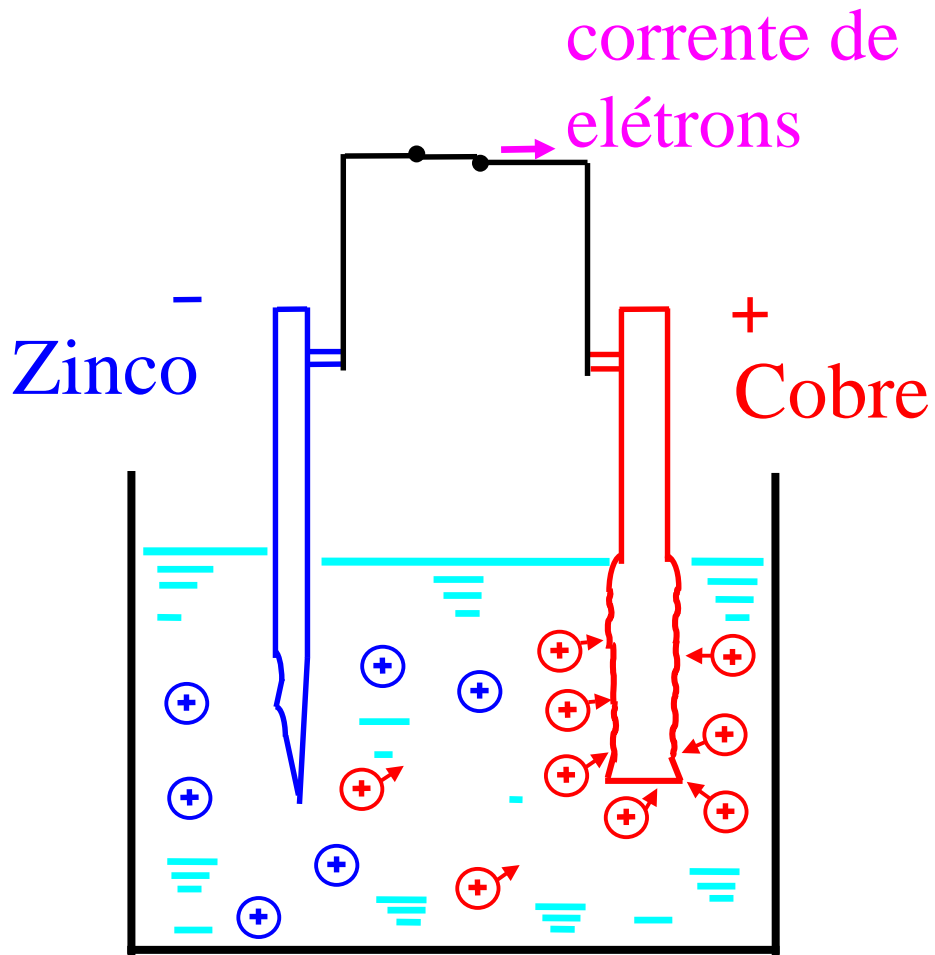
A pilha inventada por Alessandro Volta



**Volta apresenta a
Napoleão e a
cientistas
franceses sua grande
invenção (1799)**



PILHA VOLTAICA

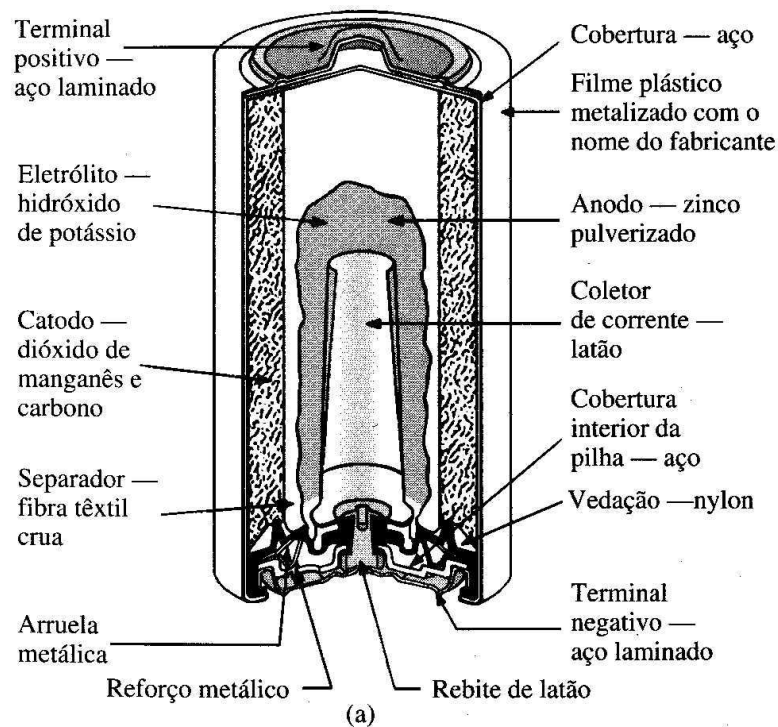


água + sulfato de cobre

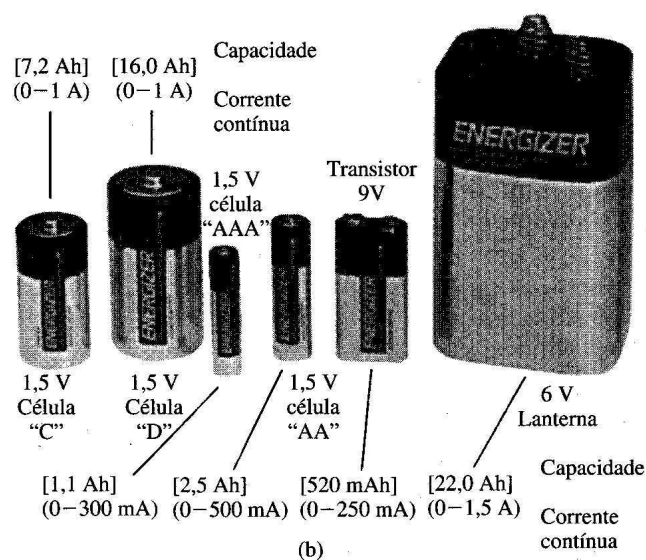
⊕ íons de cobre

⊕ íons de zinco

Pilha Secca Alcalina

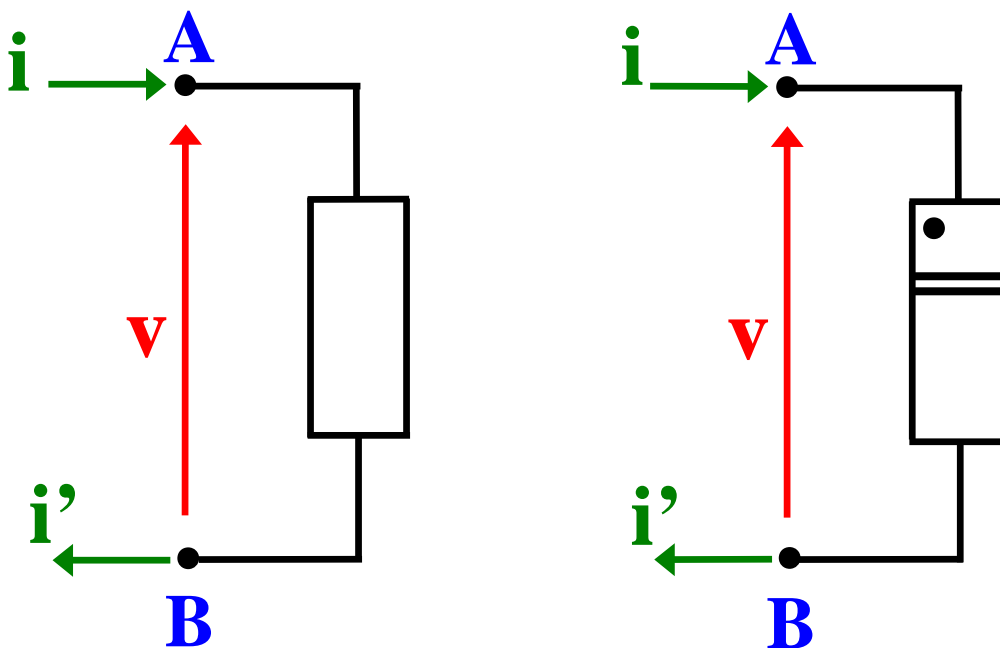


Células Primárias



BIPOLos ELÉTRICOS

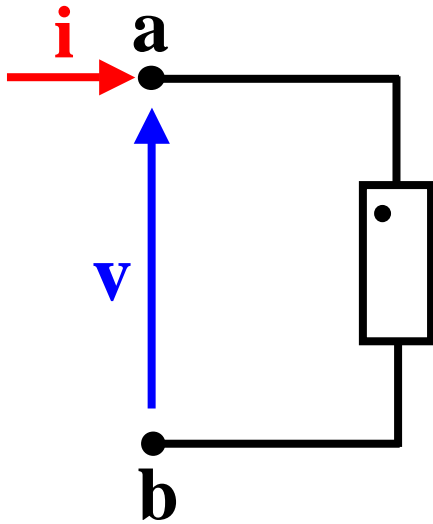
- SÍMBOLOS:



- PROPRIEDADES:

$$\begin{cases} i(t) = i'(t), & \forall t \\ v(t) = v_A(t) - v_B(t), & \forall t \end{cases}$$

VARIÁVEIS ELÉTRICAS NOS BIPOLOS



$$\mathbf{i} = \int_S \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{dS}}$$

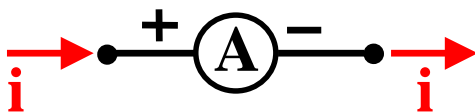
$$\mathbf{v} = \int_b^a \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{d\ell}}$$

$$\mathbf{i} = \frac{dq}{dt}$$

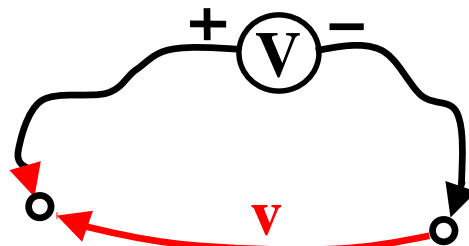
$$\mathbf{v} = \frac{dw}{dq}$$

(CAMPO POTENCIAL)

AMPERÍMETRO



VOLTÍMETRO



IMPORTANTE:

**AS FLECHAS DE REFERÊNCIA
DE TENSÃO E DE CORRENTE
SÃO -**

**- REGRAS PARA LIGAR
VOLTÍMETROS E AMPERÍ-
METROS AO CIRCUITO !**

Potência Elétrica

Potência instantânea :

$$p(t) = \frac{d w(t)}{dt} \quad (W)$$

Mas :

$$d w(t) = v(t) \cdot d q(t)$$

e

$$d q(t) = i(t) \cdot dt$$



$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

TENSÃO ELÉTRICA ENTRE OS TERMINAIS DE UM BIPOLO

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (\text{VOLTS})$$

- É MEDIDA PELOS **VOLTÍMETROS**

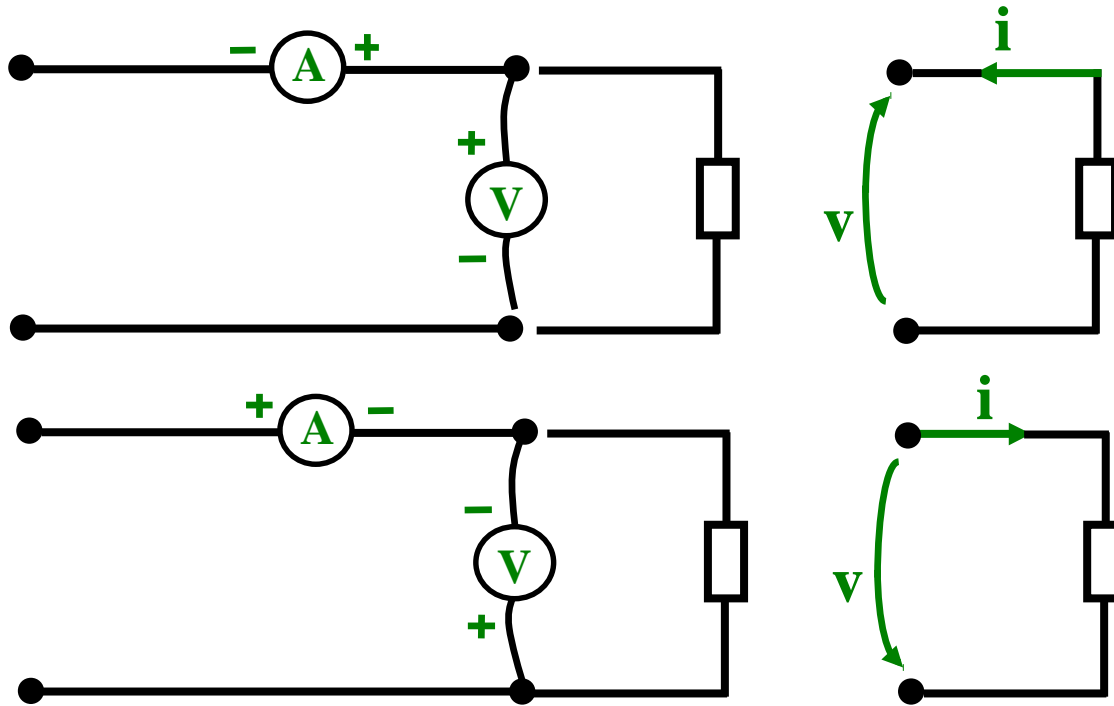
- **POTÊNCIA INSTANTÂNEA:**

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{WATTS})$$

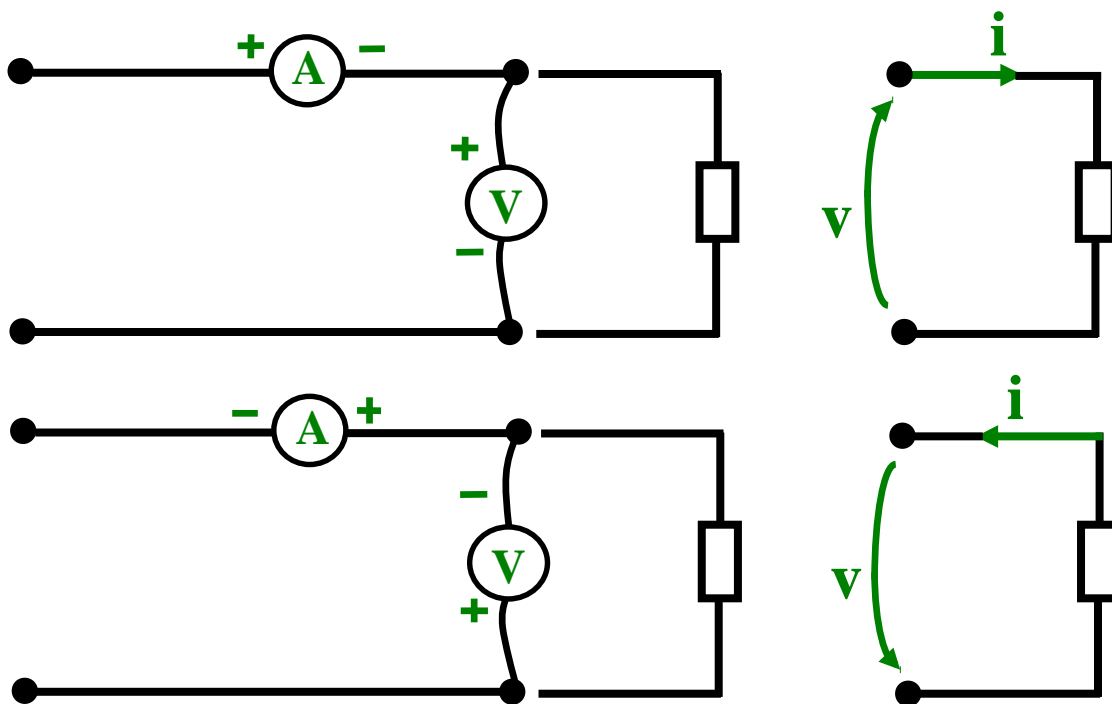
- PARA SABER SE A POTÊNCIA ESTÁ SENDO **RECEBIDA** OU **FORNECIDA** É PRECISO FIXAR **CONVENÇÕES !**

CONVENÇÕES

Gerador

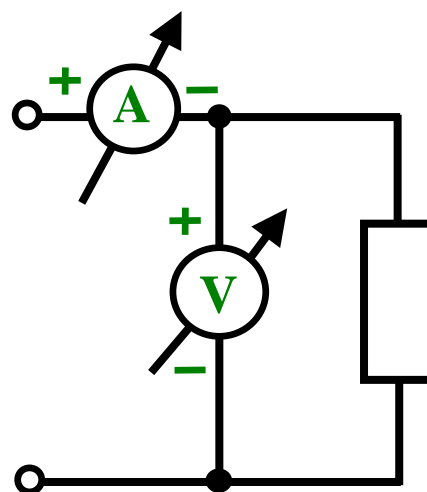
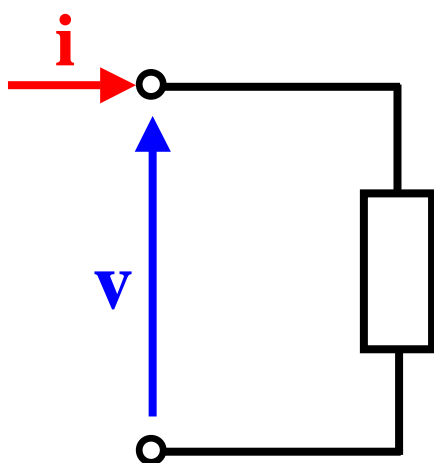


Receptor

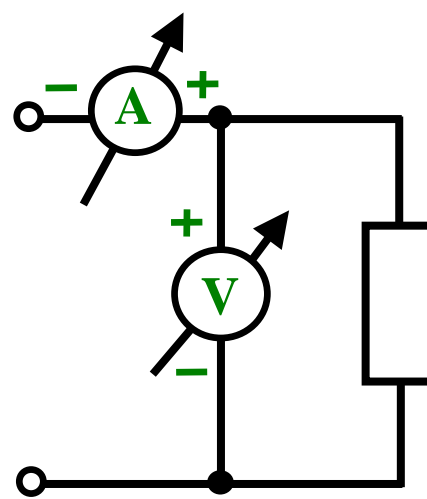
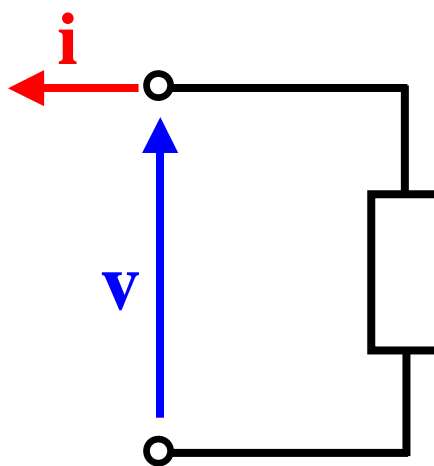


SENTIDOS DE REFERÊNCIA NOS BIPOLOS

Convenção do Receptor (SPICE)



Convenção do Gerador



POTÊNCIA ELÉTRICA NOS BIPOLOS

- CONVENÇÃO DO GERADOR:

$v.i > 0 \rightarrow$ BIPOLO FORNECE
POTÊNCIA

- CONVENÇÃO DO RECEPTOR:

$v.i > 0 \rightarrow$ BIPOLO RECEBE
POTÊNCIA

POTÊNCIA MÉDIA NUM INTERVALO :

$$P \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t) \cdot dt \quad (\text{WATTS})$$

CONVENÇÃO DE NOTACÃO:

- LETRAS MINÚSCULAS PARA FUNÇÕES DO TEMPO.
 - LETRAS MAIÚSCULAS PARA GRANDEZAS INDEPENDENTES DO TEMPO.
-
- CASO DE v E i PERIÓDICOS COM PERÍODO T :

$$P = \frac{1}{T} \int_T v(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

ENERGIA ELÉTRICA:

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t p(\tau) \cdot d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau$$

(JOULES)

UNIDADE PRÁTICA DE ENERGIA:

- QUILOWATT – HORA (kWh)

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- MEDIDOR DE ENERGIA:
CALCULA

$$\int_{t_0}^t p(\tau) \cdot d\tau$$

ALGUNS VALORES NUMÉRICOS

CARGA ELÉTRICA

- Carga em uma célula DRAM (quando o bit 1 é armazenado) 50 fcoulomb
- Carga em um capacitor de potência 5 mcoulomb
- Carga em um raio 3000 coulomb

CORRENTE ELÉTRICA

- Corrente de fuga em transistores de CIs fA
- Corrente de sinais em transistores de CIs μA -mA
- Limite de corrente suportada pelo corpo humano ~10mA
- Correntes de alimentação em CIs 100mA-10A
- LED 10mA-100mA
- Lâmpadas e eletrodomésticos pequenos 1A-10A
- Limite de Corrente residencial 20A
- Rede de distribuição residencial 100^{A}
- Rede de distribuição comercial ou industrial 1000A

ALGUNS VALORES NUMÉRICOS

TENSÃO ELÉTRICA

- Sinal em uma antena $1\mu\text{V}$
- Sinal em um microfone (fonte não-ruidosa) $1\mu\text{V}$
- Sinal de áudio (CD player) 100mV
- Tensão de alimentação de um CI $1,8\text{V}$ a 12V
- Bateria de carro 12V
- Rede de distribuição residencial 10kV
- Monitor a cores 10kV
- Sistema de transmissão de potência 100kV

POTÊNCIA

- Sinal em um microfone (fonte não-ruidosa) pW
- CIs μW a vários W
- Lâmpada residencial 100W
- Aquecedor elétrico 1kW
- Máximo consumo residencial 25kW
- Sistema de som em show de rock 50kW
- Central transmissora de rádio 100kW
- Sistema de iluminação de show de rock 250kW
- Usina de geração de energia elétrica 1GW

BIPOLos ELEMENTARES

{	PASSIVOS	{	RESISTORES
		{	CAPACITORES
			INDUTORES
{	ATIVOS	{	GERADORES DE TENSÃO
		{	GERADORES DE CORRENTE

**CLASSIFICAÇÃO QUANTO À
RELAÇÃO CORRENTE-TENSÃO:**

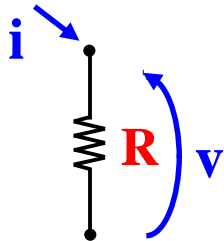
- LINEARES
- NÃO LINEARES

RESISTOR

$$v = r(i)$$

$$i = g(v)$$

1 – Linear Fixo → Ideal



$$v = R i$$

$$i = G v$$

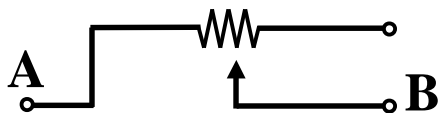
$$R \rightarrow \Omega$$

$$G \rightarrow S$$

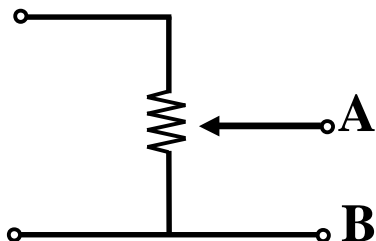
$$p = vi = Ri^2 = Gv^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{i^2}{G}$$

2 – Linear Variável

$$v(t) = R(t) i(t)$$



reostato → controle de corrente



potenciômetro → controle de tensão

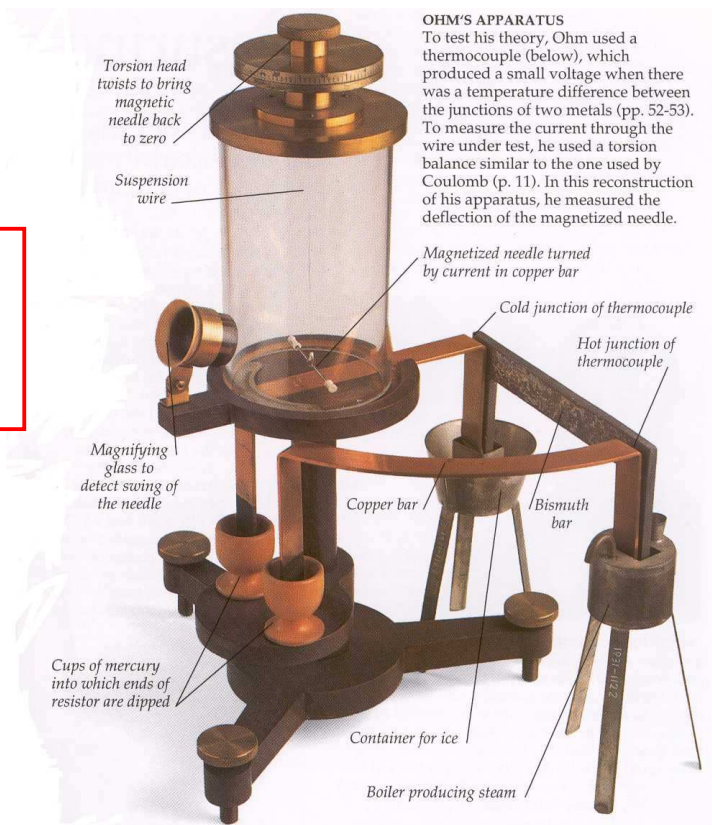
3 – Não-linear

George Simon Ohm



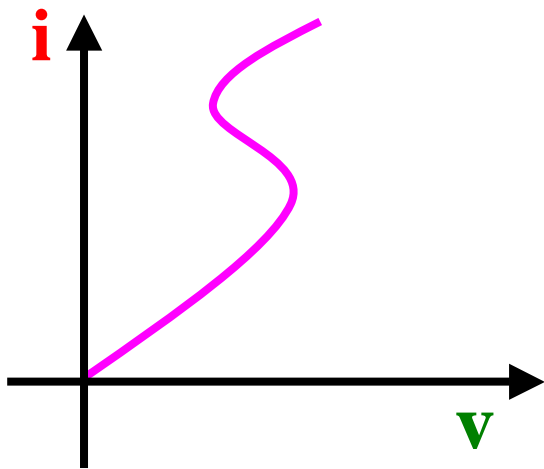
- Alemão (Erlangen, 1789; Colônia, 1854)
- Físico e Matemático
- Professor de Física, Univ. de Colônia
- 1827 Lei de Ohm (empírica) 22 anos para ser reconhecida
- Pesquisas nas áreas de física molecular, acústica e comunicação telegráfica

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$$



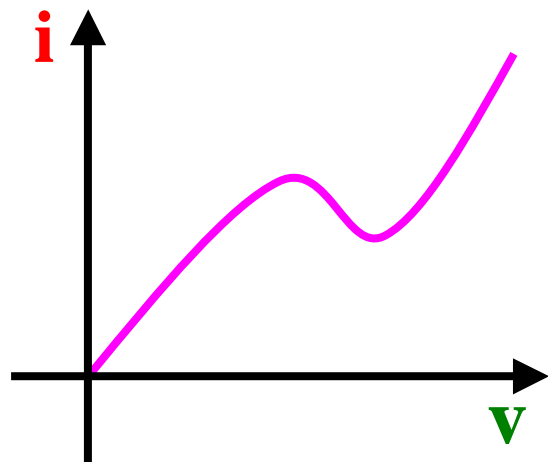
Aparato Experimental usado por Ohm

RESISTOR NÃO-LINEAR



$$v = r(i)$$

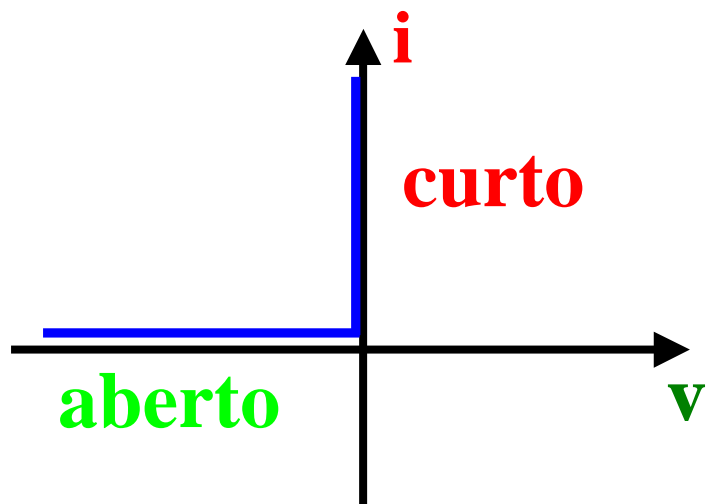
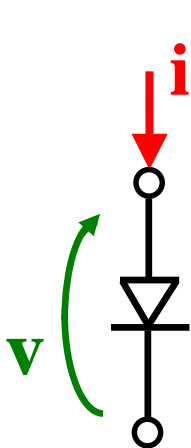
Controlado por
corrente



$$i = g(v)$$

Controlado por
tensão

Ex: Diodo ideal



Diodo real: $i = g(v) = I_s (e^{\lambda v} - 1)$

RESISTORES REAIS

1 – Carvão

Valor

Potência máxima 1/8 1/4 1/2
 1 2 watts

Tolerância 10 % 5 % 1%
 0,5 % 0,1 %

Corrente máxima:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}}$$

Resistência varia com

Tensão
Frequência
Umidade
Temperatura

2 – Fio

Potências mais elevadas

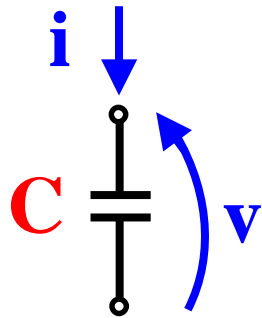
Modelo: 

3 – Filme Metálico: Circuitos integrados

CAPACITOR

$$q(t) = C(v)$$

1- Linear , Fixo → Ideal



$$q = C v$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$$

$$p = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}$$

$$W = \frac{1}{2} C (v^2 - \cancel{v^2(t_0)}) = \boxed{\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}$$

0

2 - Linear , Variável

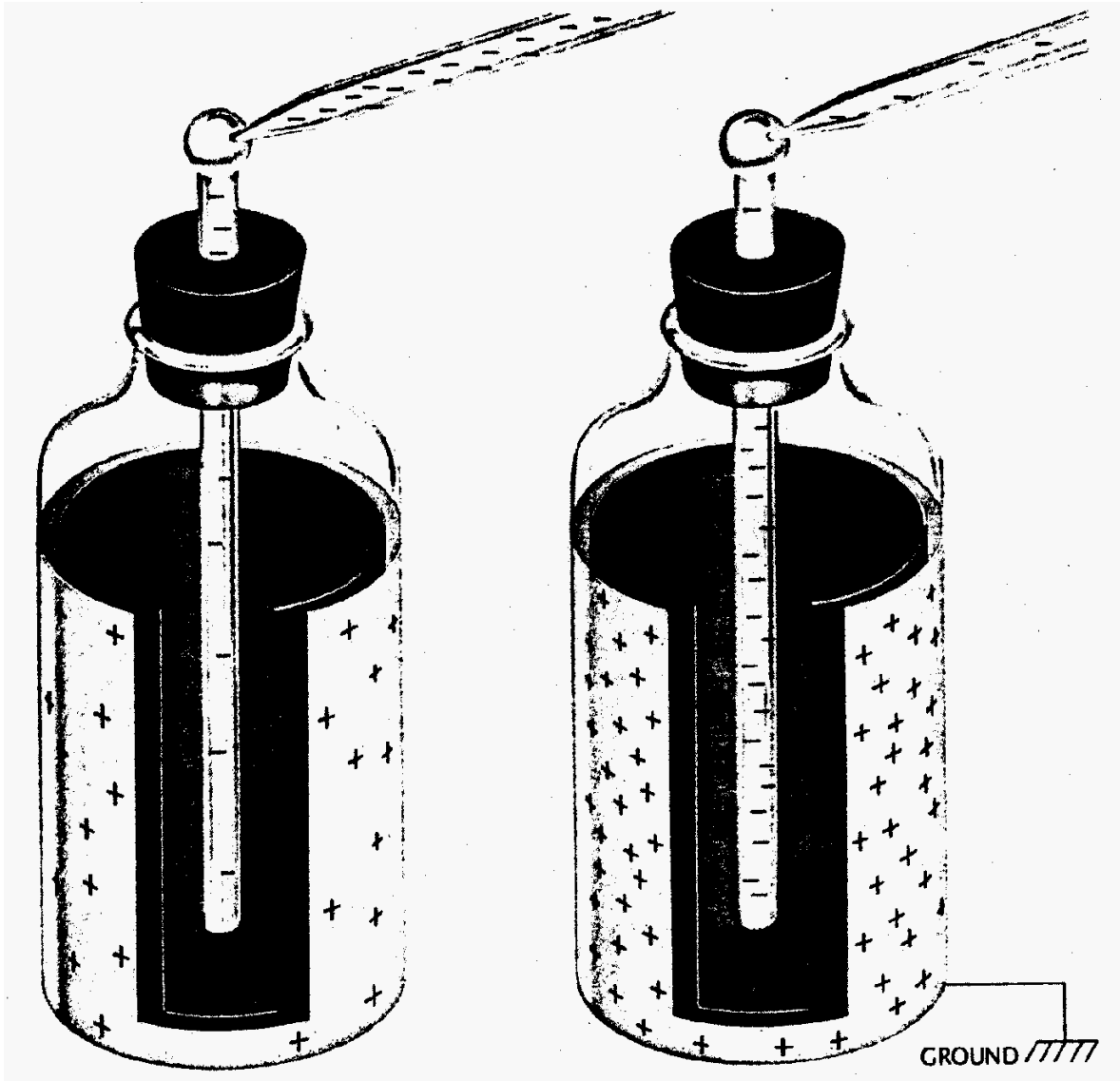
$$q(t) = C(t) v(t)$$

$$i(t) = C(t) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \frac{dC(t)}{dt}$$

3 - Não – linear

$$\text{Ex.: } q(t) = C(v) \cdot v(t)$$

Garrafa de Leyden



Universidade de Leyden (Holanda)

1746

$$C \uparrow \quad \begin{matrix} A \uparrow \\ d \downarrow \end{matrix}$$

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

CAPACITORES REAIS

Valores: $\mu\text{F} \rightarrow \text{pF}$

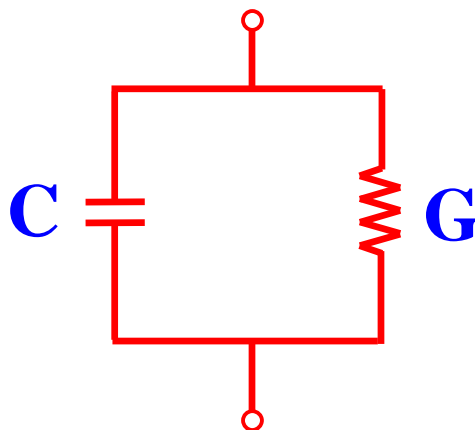
Especificações: **Ex.:** 100 nF / 500V

↑
tensão de ruptura
do dielétrico

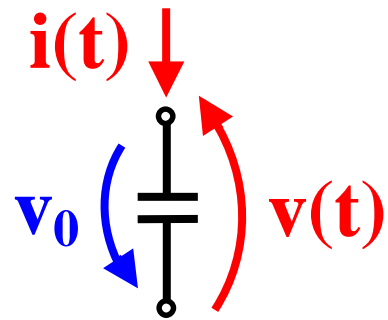
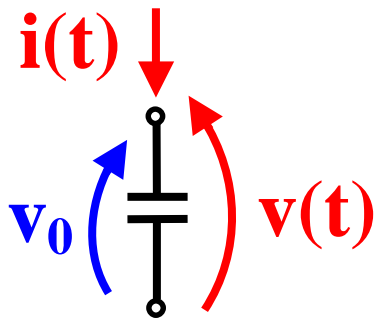
Tipos: de acordo com o dielétrico

- cerâmica
- mylar
- poliestireno
- eletrolítico
- tântalo

Modelo:



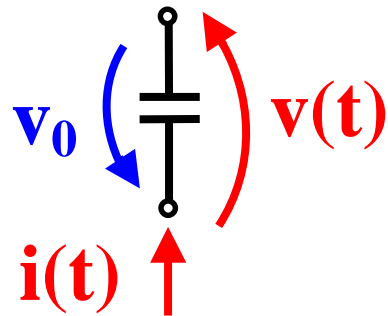
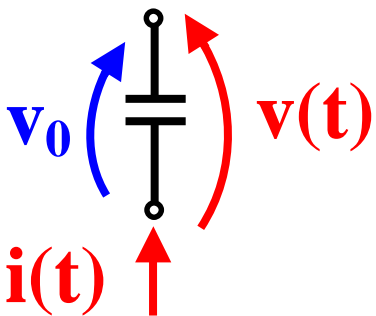
CAPACITOR E CONVENÇÕES



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int i dt + v_0$$

$$v = \frac{1}{C} \int i dt - v_0$$



$$i = -C \frac{dv}{dt}$$

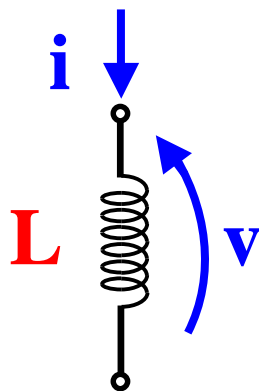
$$v = -\frac{1}{C} \int i dt + v_0$$

$$v = -\frac{1}{C} \int i dt - v_0$$

INDUTOR

$$\psi = L (i)$$

1 – Linear , Fixo → Ideal



$$\psi = L \cdot i$$

$$v = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

$$p = \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt}$$

$$w = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{1}{2} L i_0^2$$

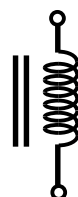
2 – Linear, Variável

$$\psi = L(t) i(t)$$

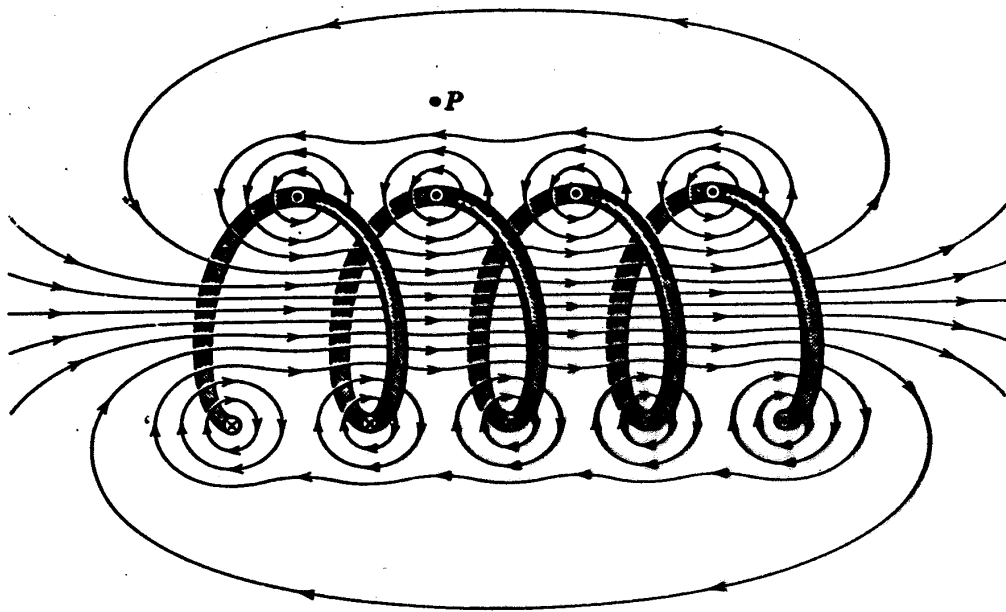
$$v = L(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

3 – Não-linear

Ex.:

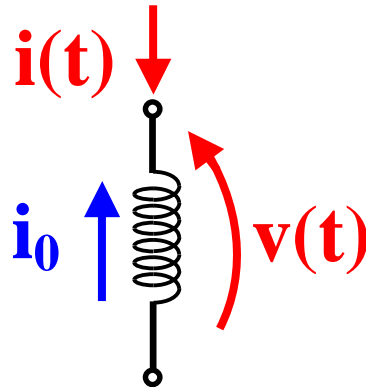
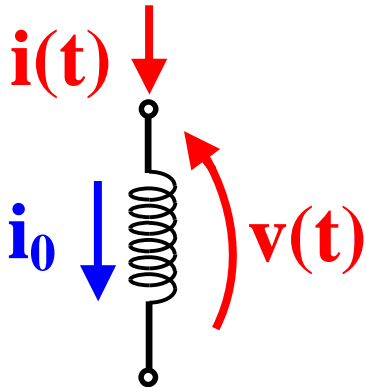


INDUTOR



Solenóide com espiras bem afastadas, mostrando as linhas de indução magnética e a sua concentração no interior da bobina.

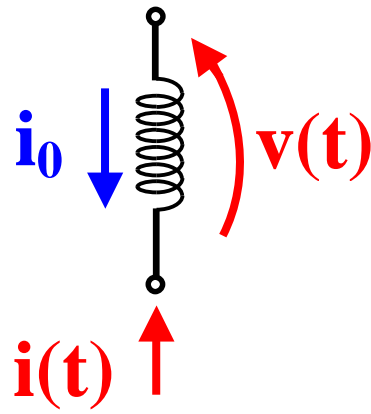
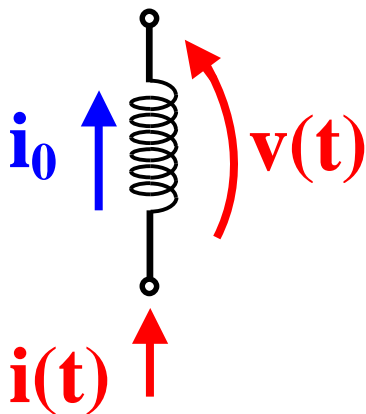
INDUTOR E CONVENÇÕES



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int v dt + i_0$$

$$i = \frac{1}{L} \int v dt - i_0$$

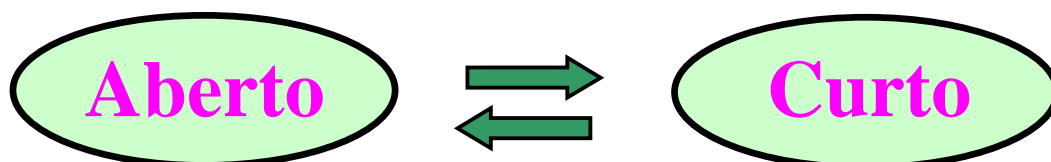
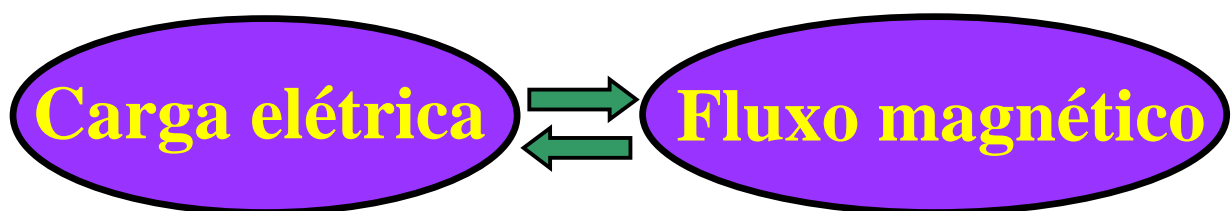
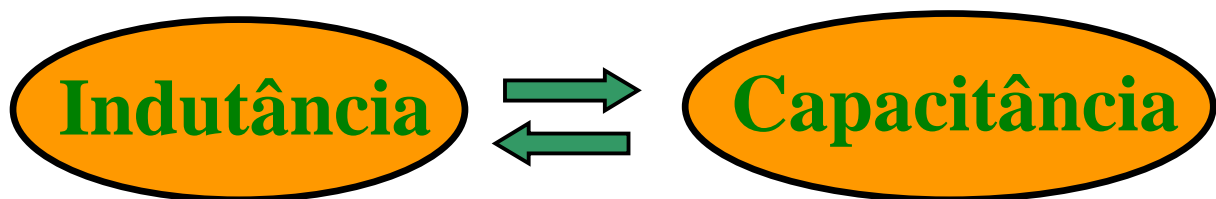
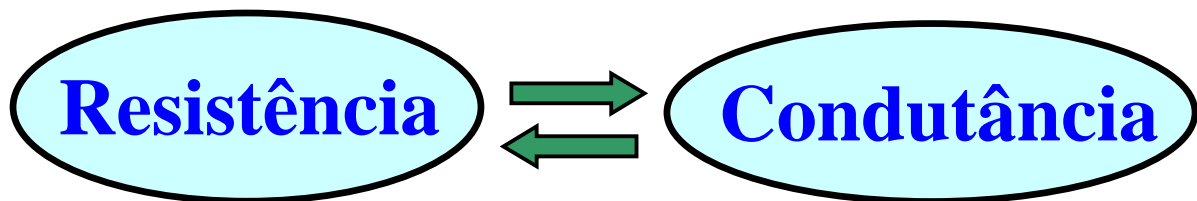
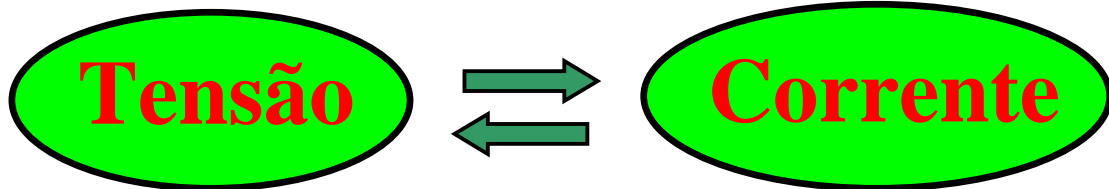


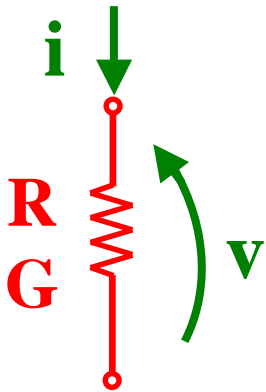
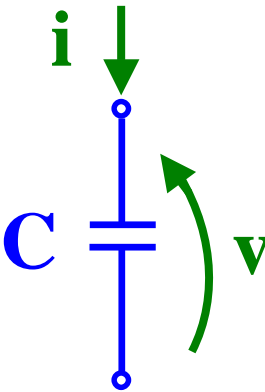
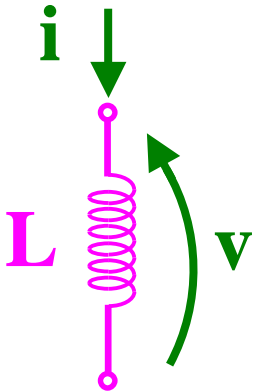
$$v = -L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{-1}{L} \int v dt + i_0$$

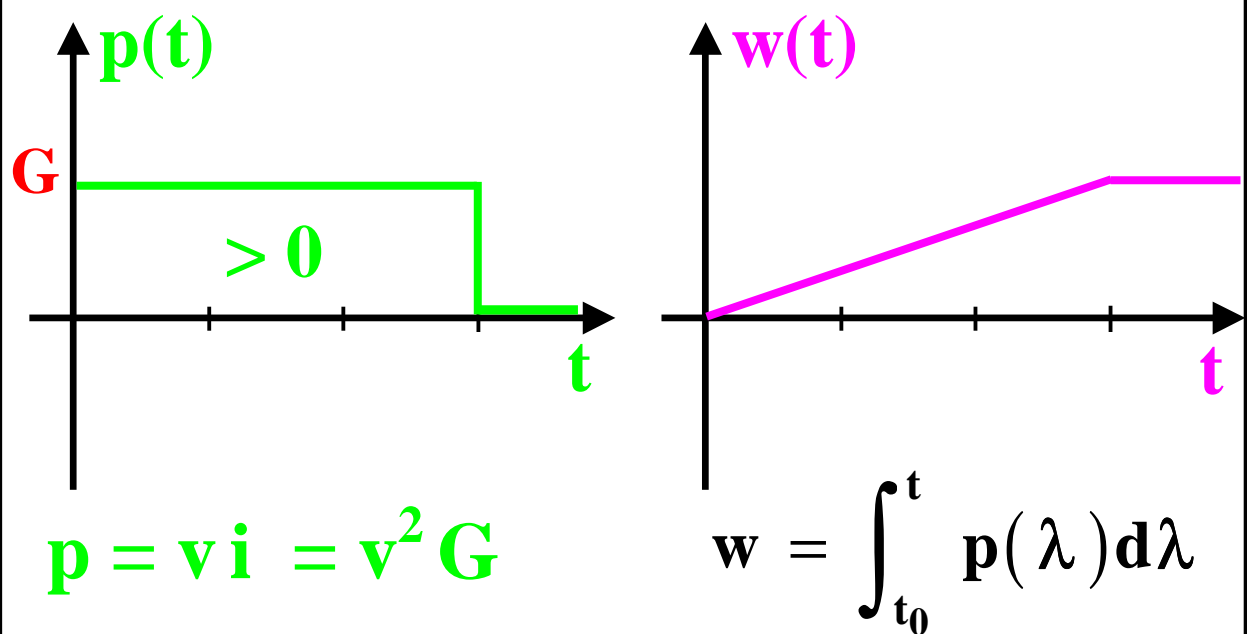
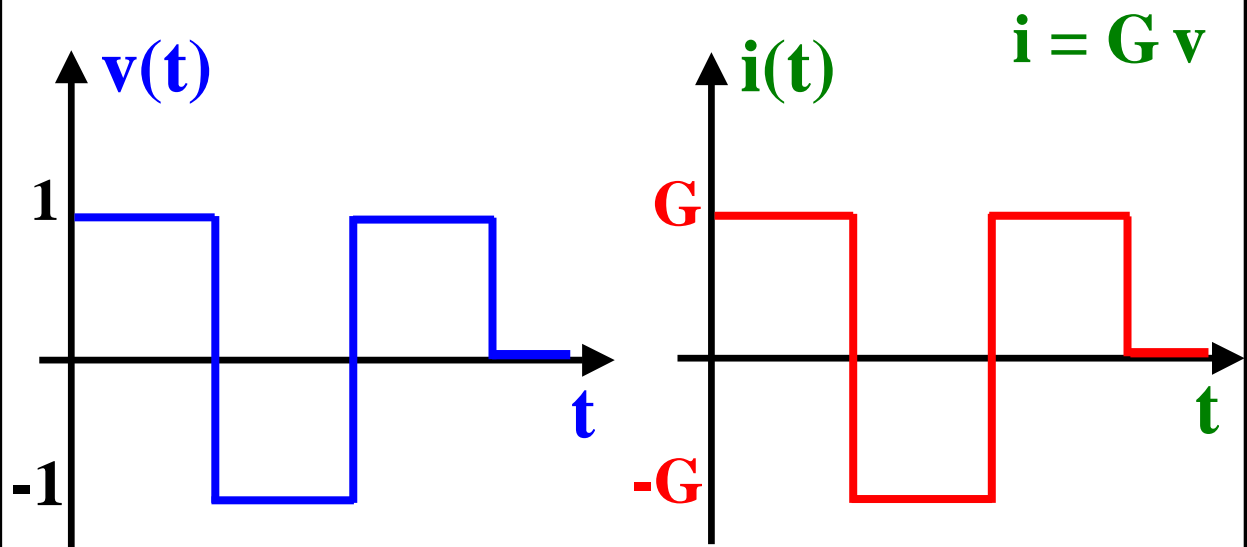
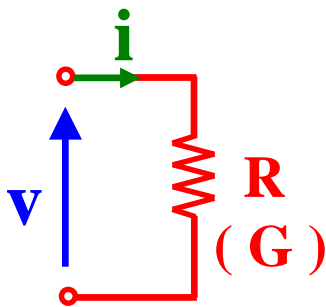
$$i = \frac{-1}{L} \int v dt - i_0$$

DUALIDADE

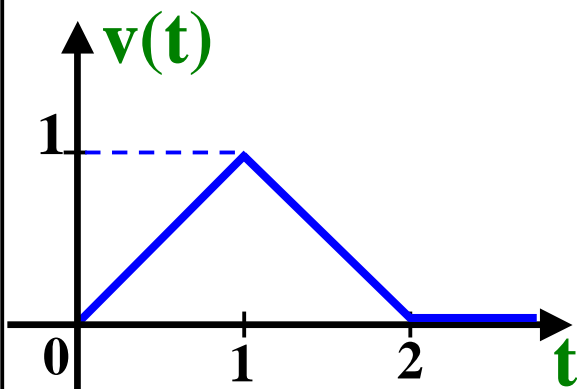
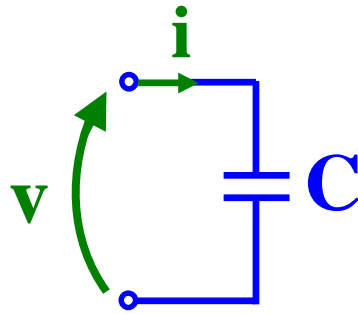


RESISTOR	CAPACITOR	INDUTOR
 $v = Ri$ $i = Gv$ $p = Ri^2$ Gv^2 v^2/R i^2/G	 $q = Cv$ $v = \frac{1}{C} \int i dt + v_0$ $i = C \frac{dv}{dt}$ $p = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}$ $w = \frac{1}{2} Cv^2$	 $\psi = Li$ $v = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int v dt + i_0$ $p = \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt}$ $w = \frac{1}{2} Li^2$

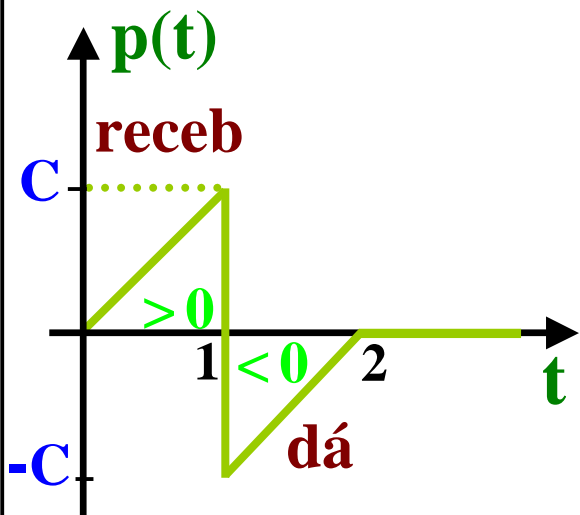
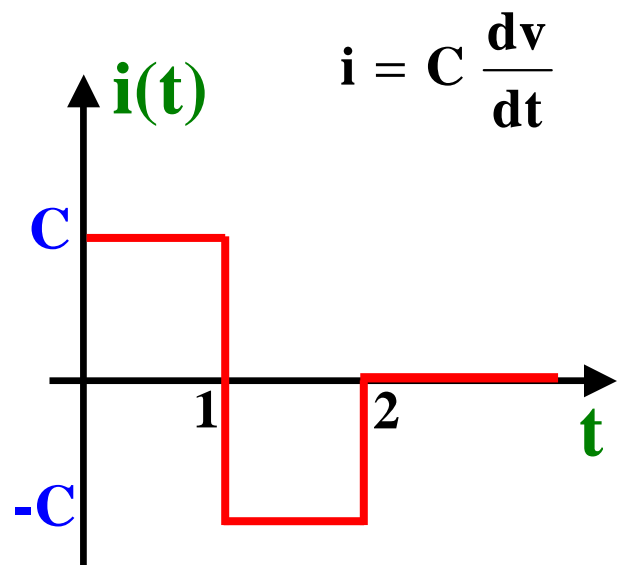
FORMAS DE ONDA EM RESISTOR



FORMAS DE ONDA EM UM CAPACITOR



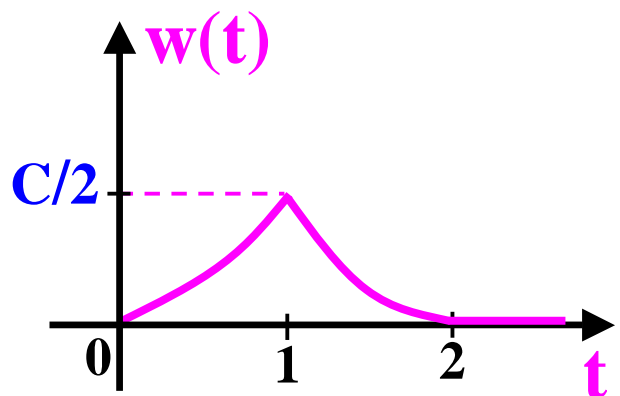
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\lambda) d\lambda + v(t_0)$$



$$p = v i$$

$$v(t_0) = 0$$

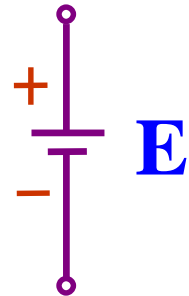
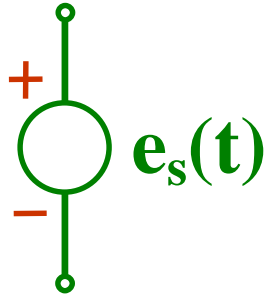
$$t_0 = 0$$



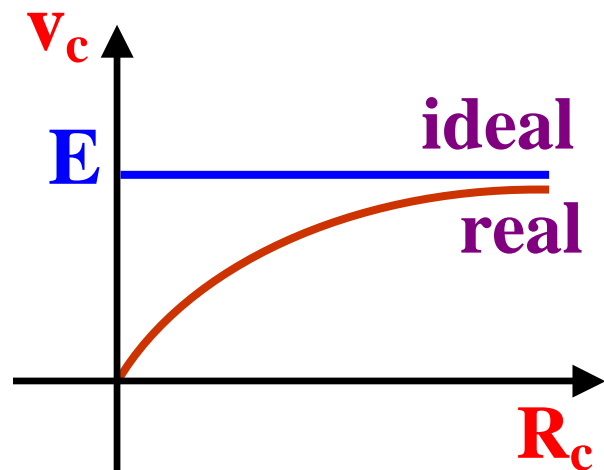
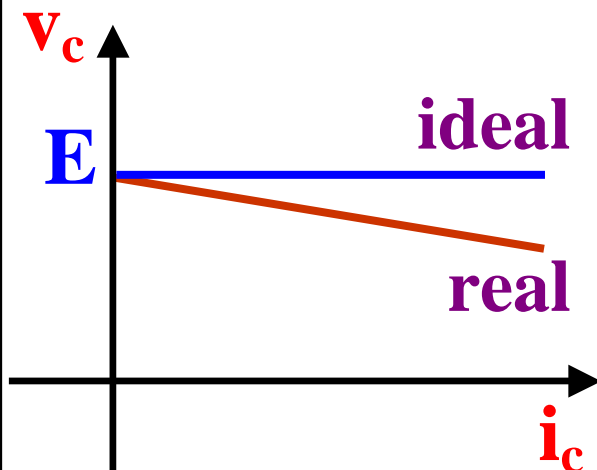
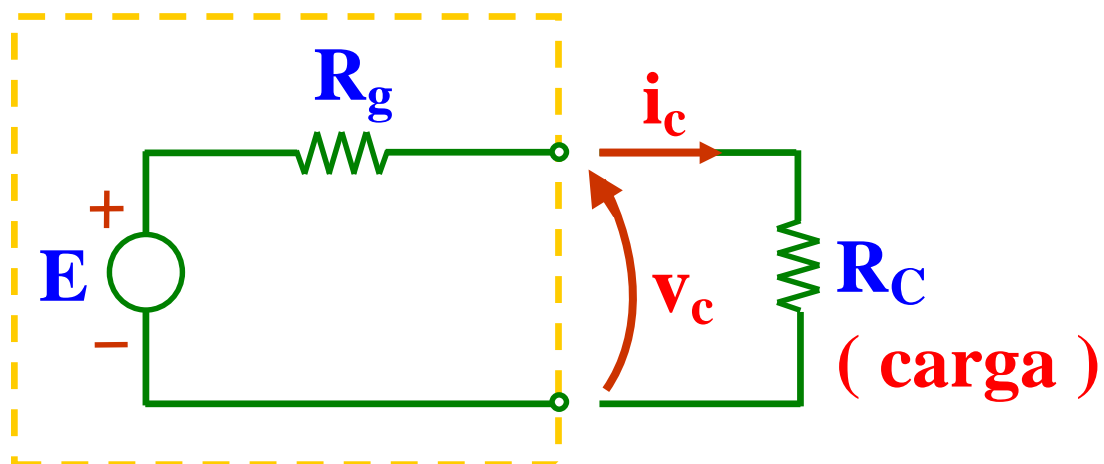
$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$W > 0$ passivo
(convenção receptor)

GERADORES DE TENSÃO

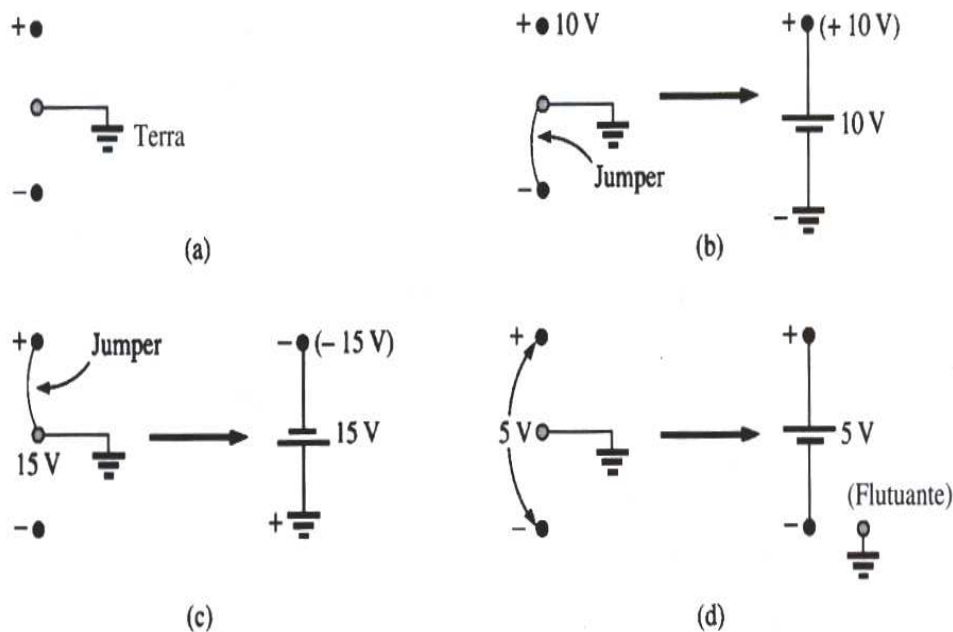


Gerador Real:



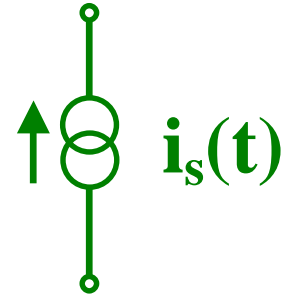
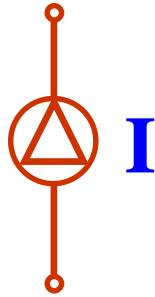
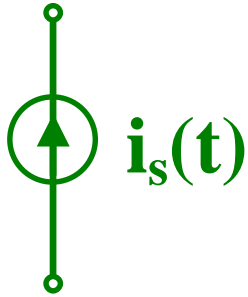
FONTES DE ALIMENTAÇÃO AC/DC

Tensão AC → Retificação e Filtragem
→ Tensão DC

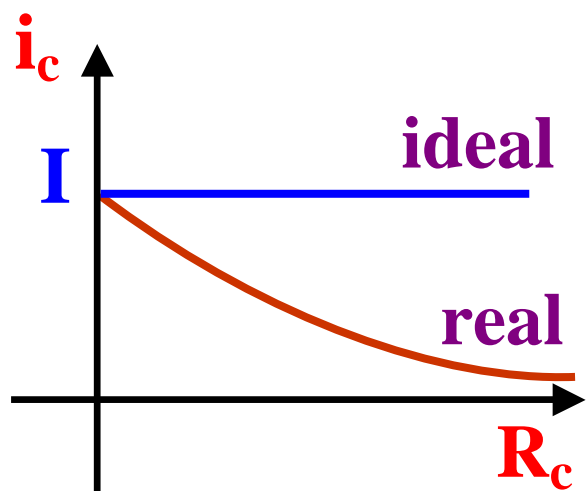
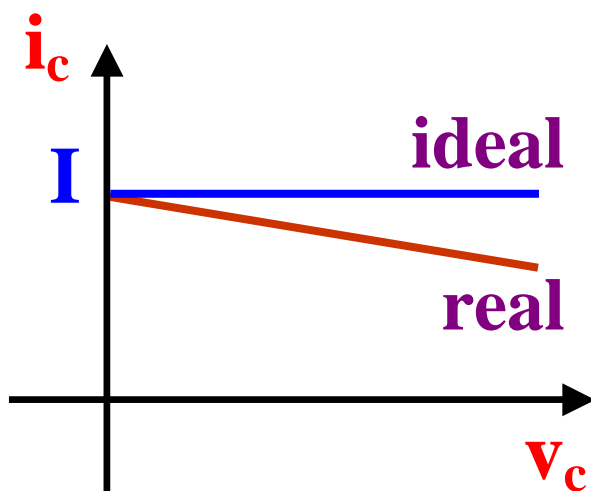
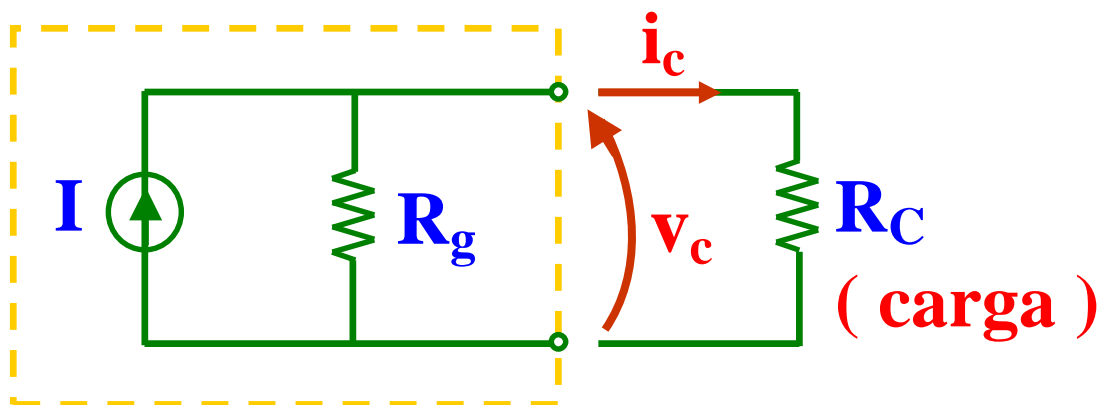


- a) Terminais disponíveis
- b) Tensão positiva em relação ao terra
- c) Tensão negativa em relação ao terra
- d) Tensão flutuante

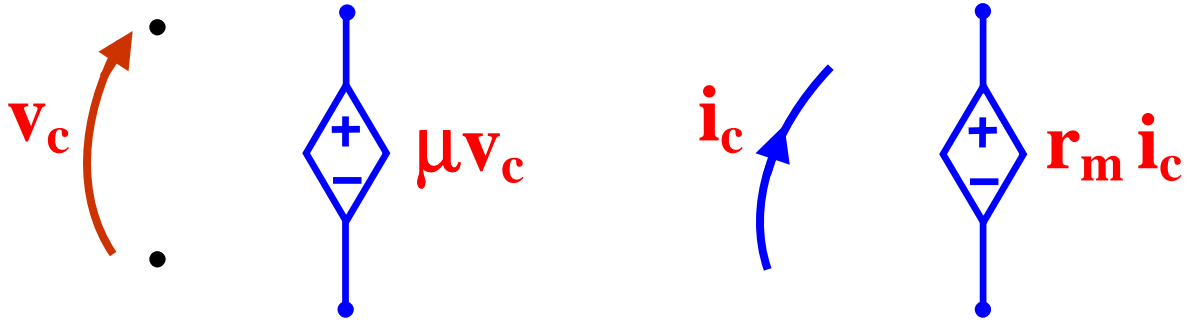
Geradores de Corrente



Gerador Real



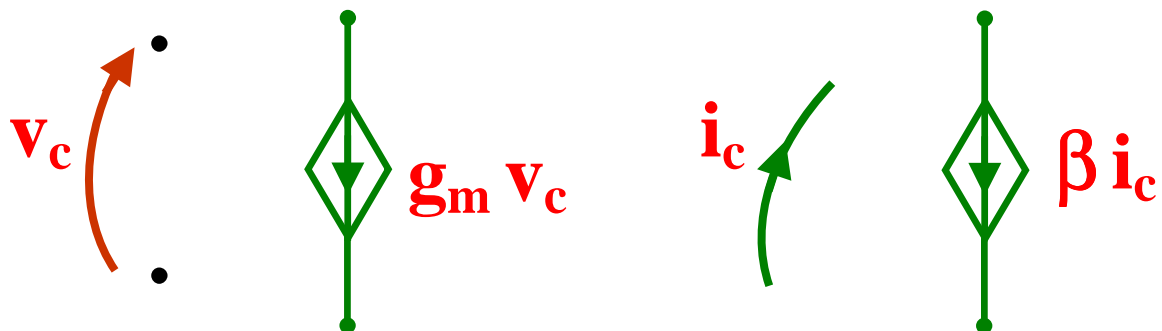
Geradores Vinculados



μ - ganho de tensão

r_m - transresistência

Geradores de Tensão



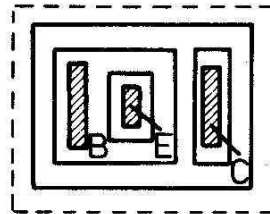
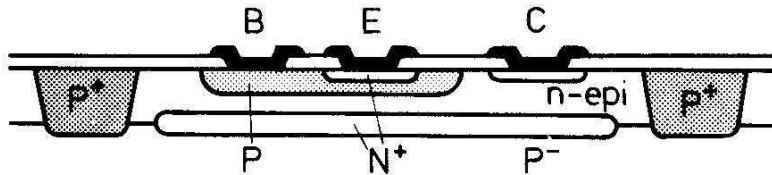
g_m - transcondutância

β - ganho de corrente

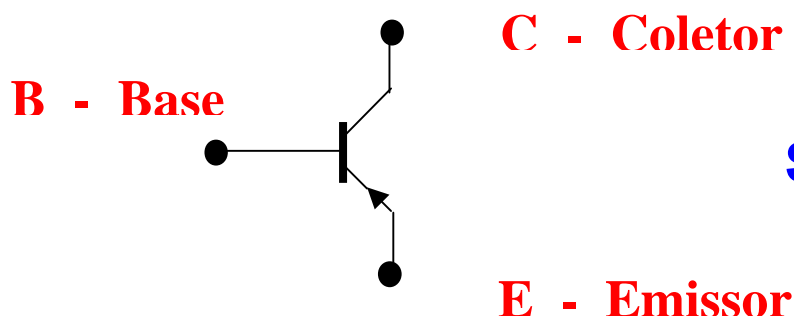
Geradores de Corrente

Aplicação dos geradores vinculados

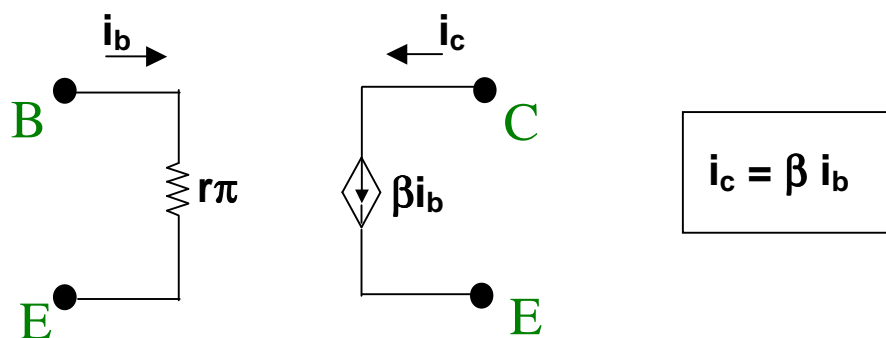
Transistor Bipolar



Estrutura Física

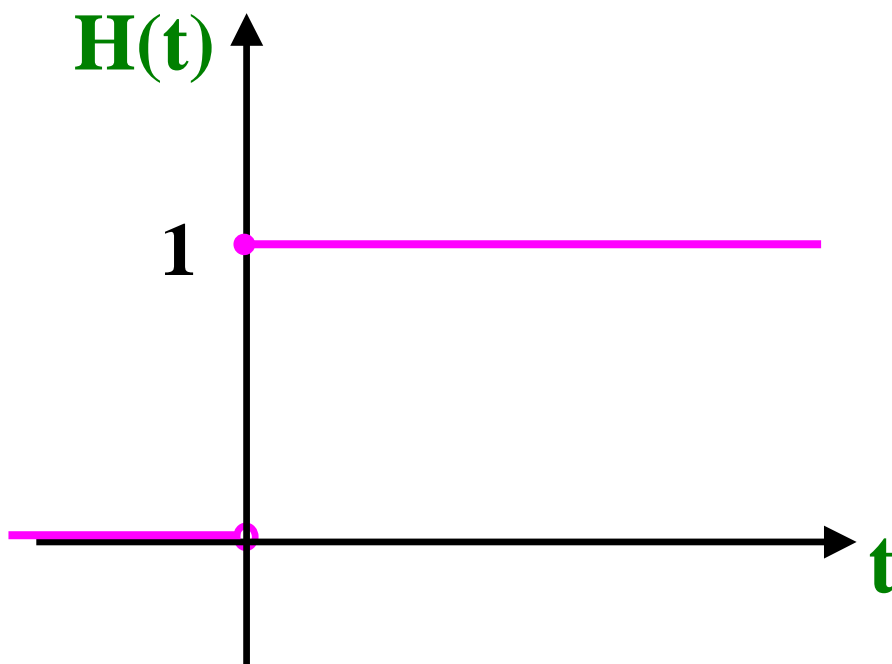


Símbolo



Modelo em circuitos

Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside



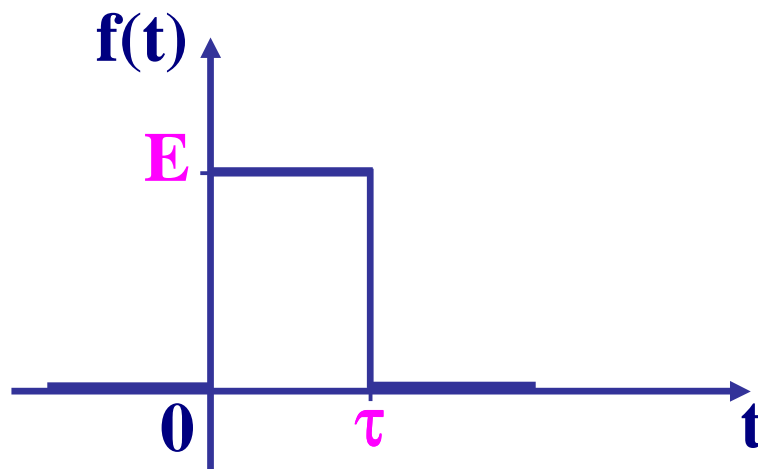
$$H(t) = u_1(t) = \mathbf{1}(t)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{para } t < \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{para } t \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Funções Obtidas da Função Degrau

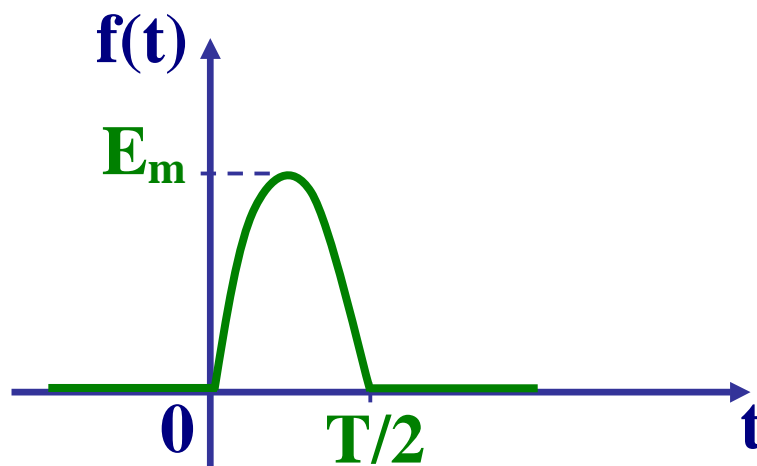
Pulso retangular de duração τ

$$f(t) = E [H(t) - H(t - \tau)]$$

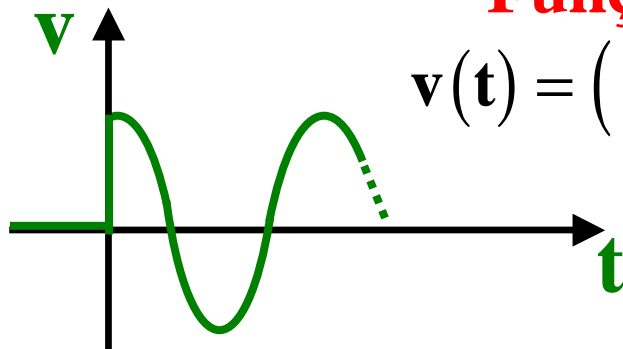


Pulso senoidal

$$f(t) = E_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \left[H(t) - H\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

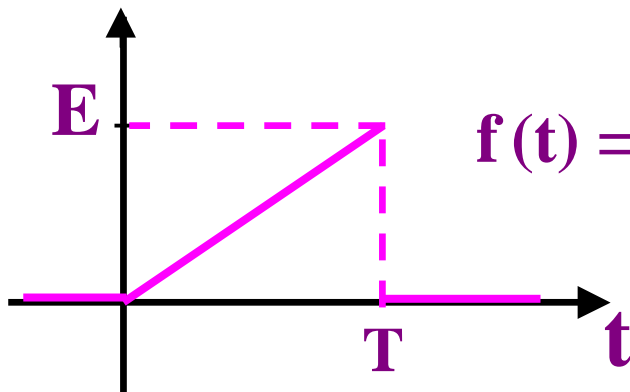


Função co-senoidal



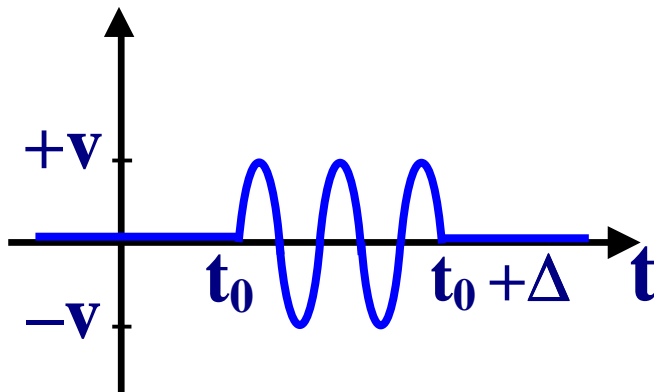
$$v(t) = (115\sqrt{2} \cos 377t) H(t)$$

Função rampa



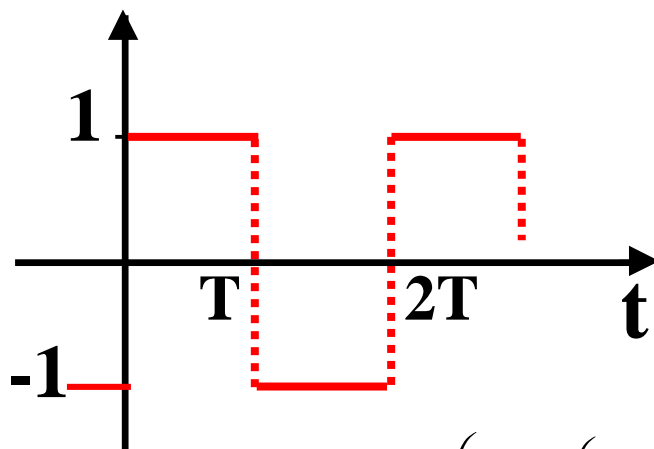
$$f(t) = t [H(t) - H(t - T)]$$

Pulso de radar



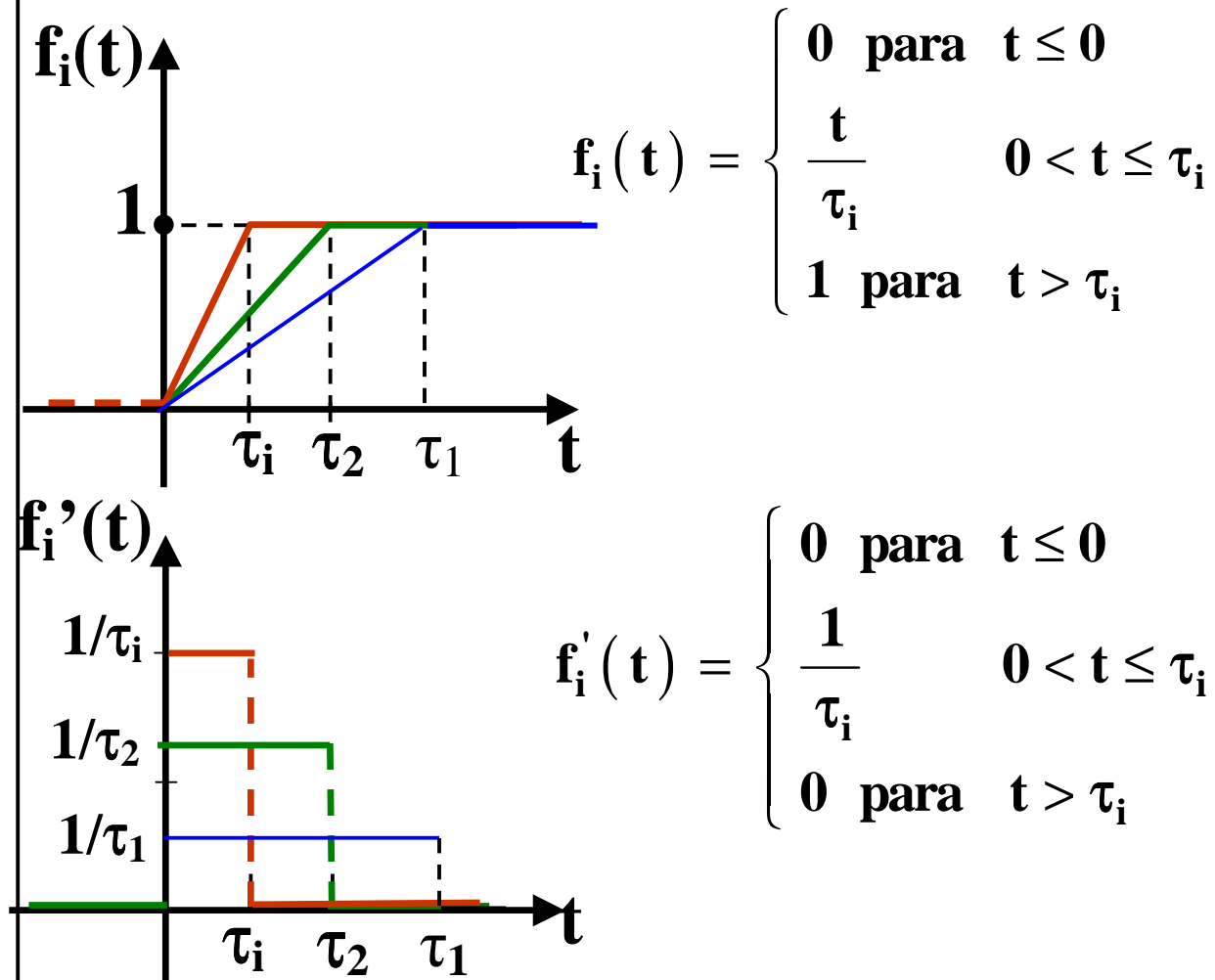
$$v(t) = V [H(t - t_0) - H(t - t_0 - \Delta)] \sin \omega(t - t_0)$$

Onda quadrada



$$f(t) = H\left(\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) - H\left(-\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)$$

Função impulsiva, Função delta ou Função de Dirac



Função de Dirac:

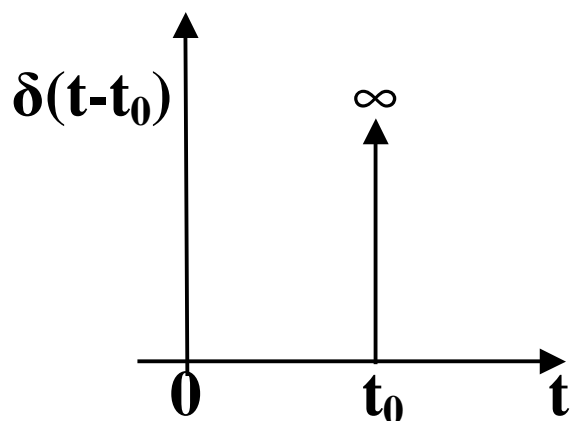
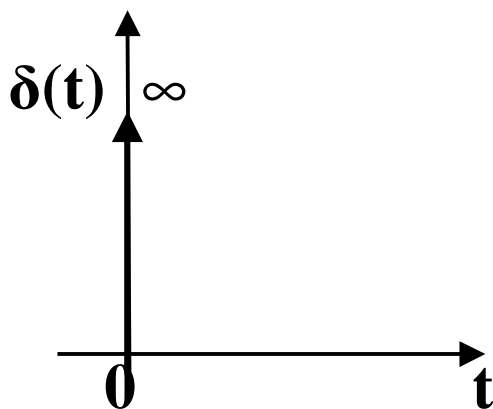
$$\delta(t) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} f_i'(t)$$

A função de Dirac é, de fato, uma *função generalizada*.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO IMPULSIVA

- $\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$
- $\delta(t-t_0) = 0, \quad \forall t \neq t_0$

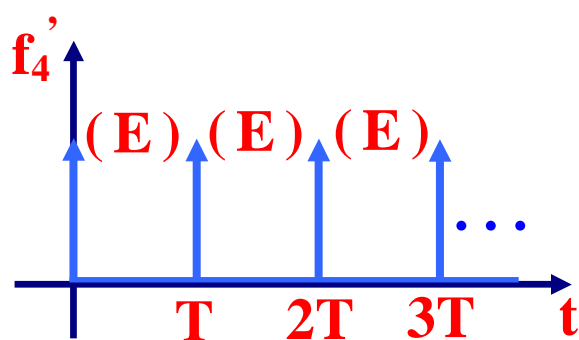
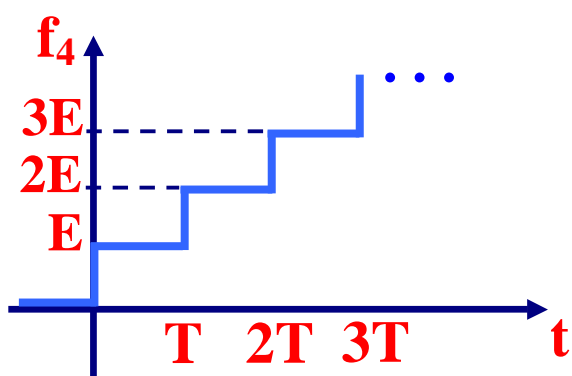
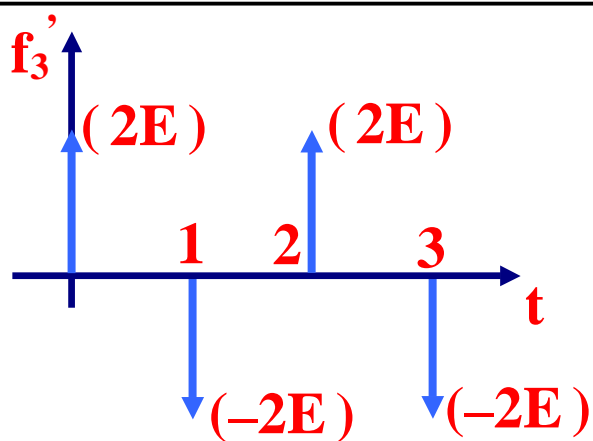
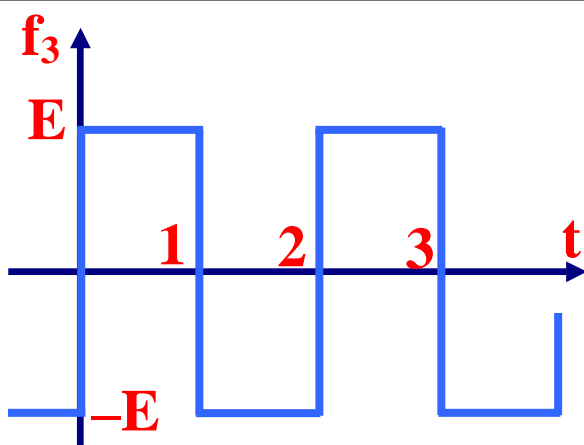
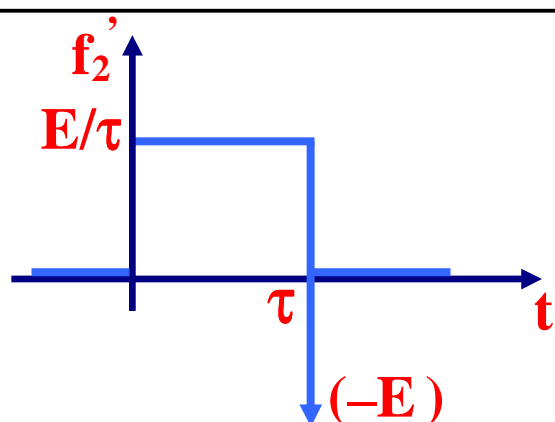
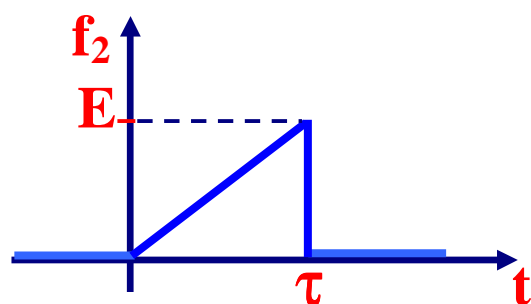
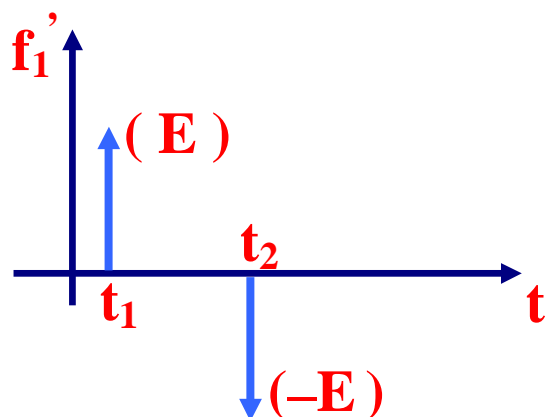
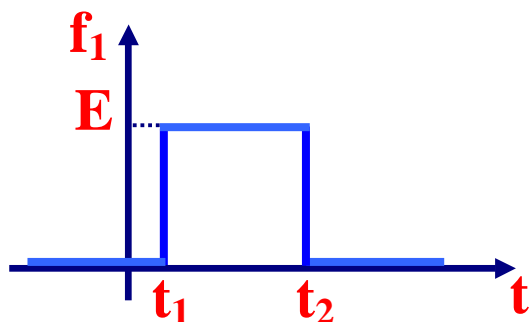
Representações gráficas da função impulsiva:



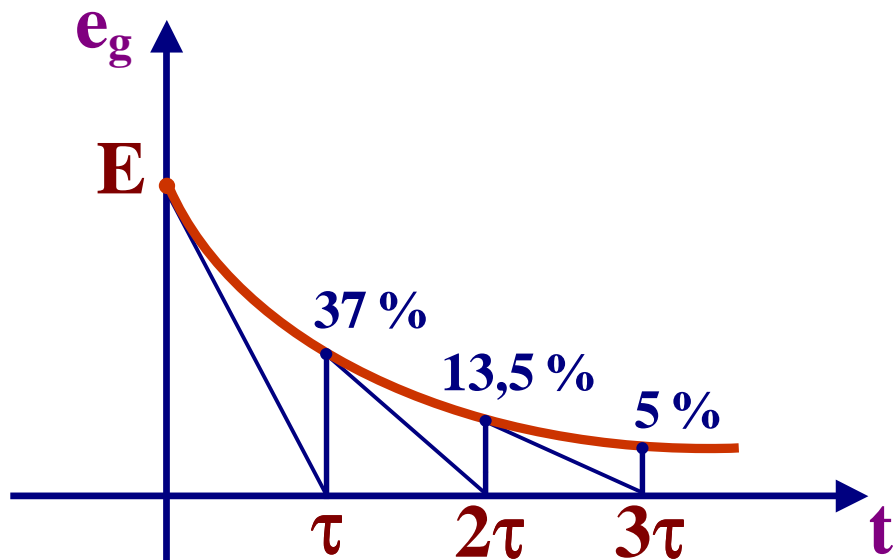
- $\int_{-t_1}^t \delta(\tau) d\tau = 1, \quad \forall t, t_1 > 0$
- $\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot \delta(t) dt = f(T)$

(para $f(\cdot)$ contínua em T)

Exemplos com Função Impulsiva



Excitação Exponencial



$$e_g(t) = E e^{s t} \quad E, s \text{ reais}$$

$$s = -\sigma \quad E > 0, \sigma > 0$$

$$e_g(t) = E e^{-\sigma t} = E e^{-t/\tau}$$

$\sigma \rightarrow$ frequência neperiana (Np/s)

$\tau = \frac{1}{\sigma} \rightarrow$ constante de tempo (s)

Para $t = \tau \rightarrow e_g = E/e$

EXCITAÇÃO CO-SENOIDAL

- Derivada e Integral → Senóides
Circuito em Regime Permanente Senoidal

- Dispositivos Reais →
geram excitação senoidal

- Soma de senóides de mesma frequência =
senóide

- **Análise de Fourier** → \forall função periódica =
=soma de senóides harmônicas, da forma

$$f_k(t) = A_{km} \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

A_{km} = amplitude ou valor máximo ou valor de pico (real e > 0) da k-ésima harmônica

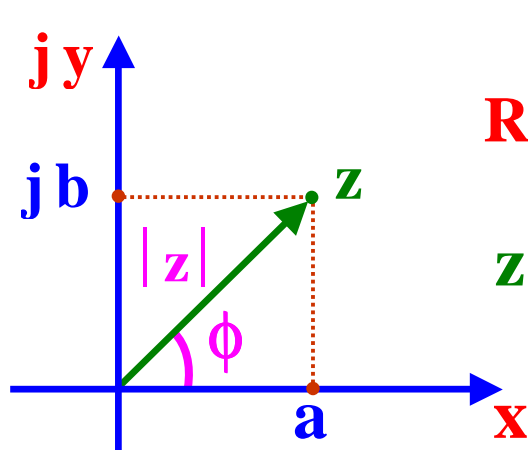
ω_0 = frequência angular fundamental (real, rd/s)

θ_k = defasagem (real, ° ou rd)

f_k = frequência da k-ésima harmônica (real, Hz ou ciclos/s)

T = período (real, s) = $1 / f_0$, $\omega_0 = 2\pi / T$

NÚMEROS COMPLEXOS



$$z = a + j b$$

Retangular ou Cartesiana

$$z = |z| e^{j\phi} = |z| \angle \phi$$

Polar

Fórmula de Euler : $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$

Séries de Mac Laurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \dots$$

$$z = |z| \cos \phi + j |z| \sin \phi = |z| (\cos \phi + j \sin \phi) = |z| e^{j\phi}$$

Identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

Seja $B = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned}\frac{dB}{d\theta} &= -\operatorname{sen}\theta + j \cos\theta \\ &= j (\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

ou

$$\frac{dB}{B} = j d\theta$$

Integrando :

$$\ln B = j\theta + C \leftarrow \text{constante}$$

$$\text{Para } \theta = 0 \rightarrow B = 1 \rightarrow \ln B = 0$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow B = e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

Números Complexos

Fórmulas de Euler :

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi$$

Forma Cartesiana: $z = a + jb$

Forma Polar : $z = |z| e^{j\phi}$

$$\begin{cases} a = |z| \cos \phi \\ b = |z| \sin \phi \end{cases}$$

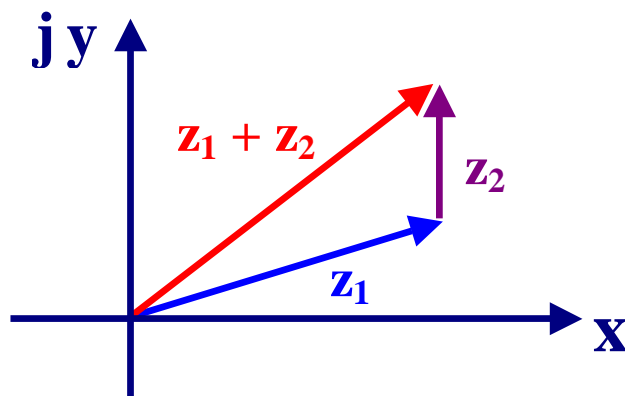
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \arctg b/a \end{cases}$$

Operações com Complexos

1 – Soma e Subtração → Forma Retangular ou Cartesiana

$$z_1 = a_1 + j b_1 \quad z_2 = a_2 + j b_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j (b_1 \pm b_2)$$



2 – Multiplicação e Divisão → Forma Polar

$$z_1 = c_1 e^{j\phi_1} \quad z_2 = c_2 e^{j\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = c_1 c_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$z_1 / z_2 = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

Números complexos

Propriedades :

$$z = a + j b = |z| e^{j\phi}$$

$$z^* = a - j b = |z| e^{-j\phi}$$

$$z + z^* = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$|e^{j\phi}| = 1$$

$$e^{\pm j\pi} = 1 \angle \pm \pi = -1$$

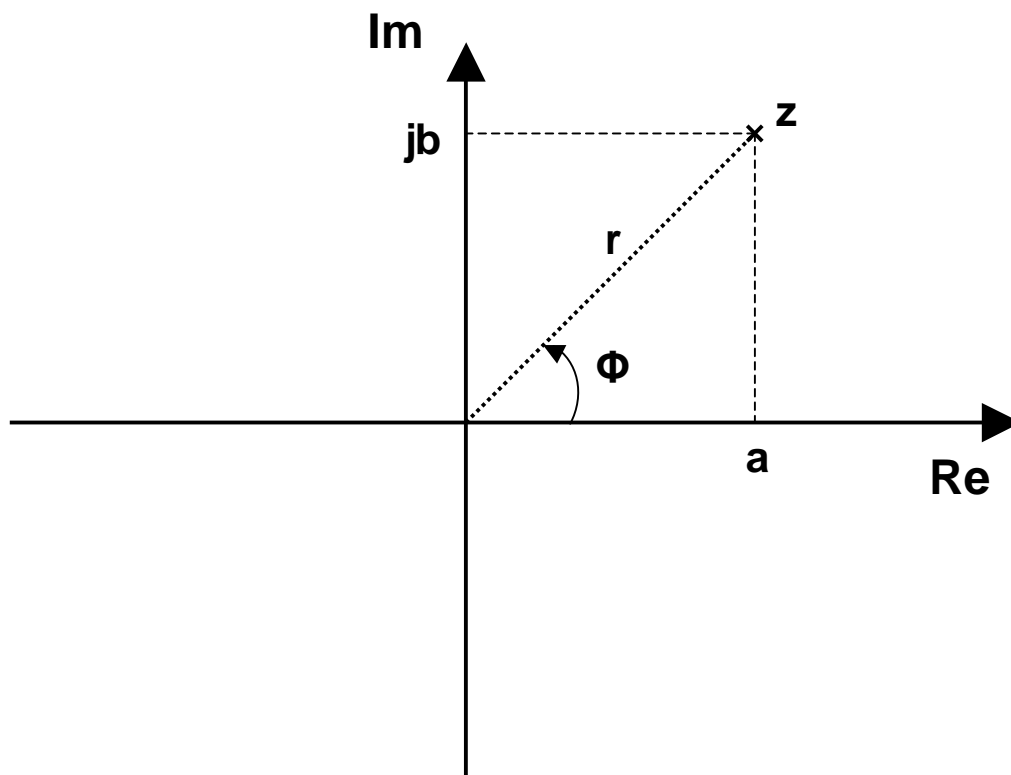
$$e^{\pm j\pi/2} = 1 \angle \pm \pi/2 = \pm j 1$$

Fórmulas de Moivre :

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right)$$

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right)$$

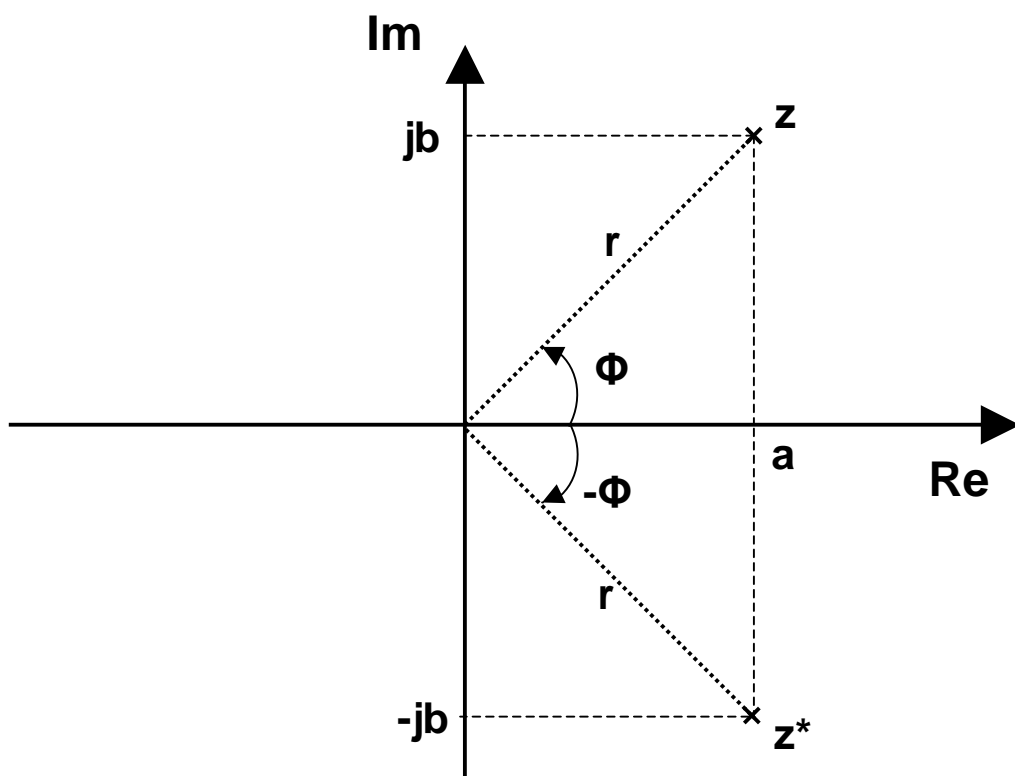
Plano Complexo



Coordenadas Retangulares: a, b

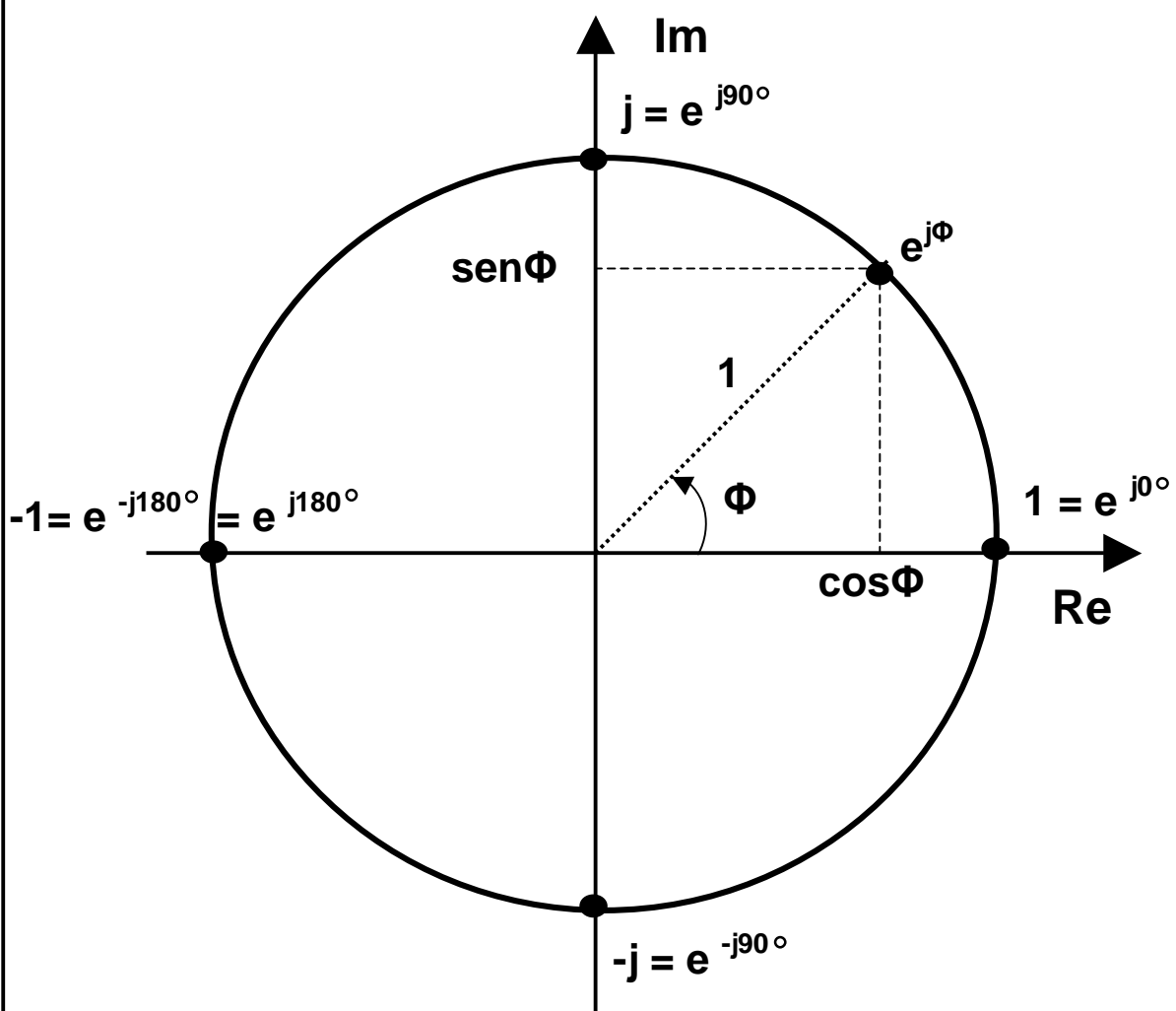
Coordenadas Polares: r, Φ

Plano Complexo



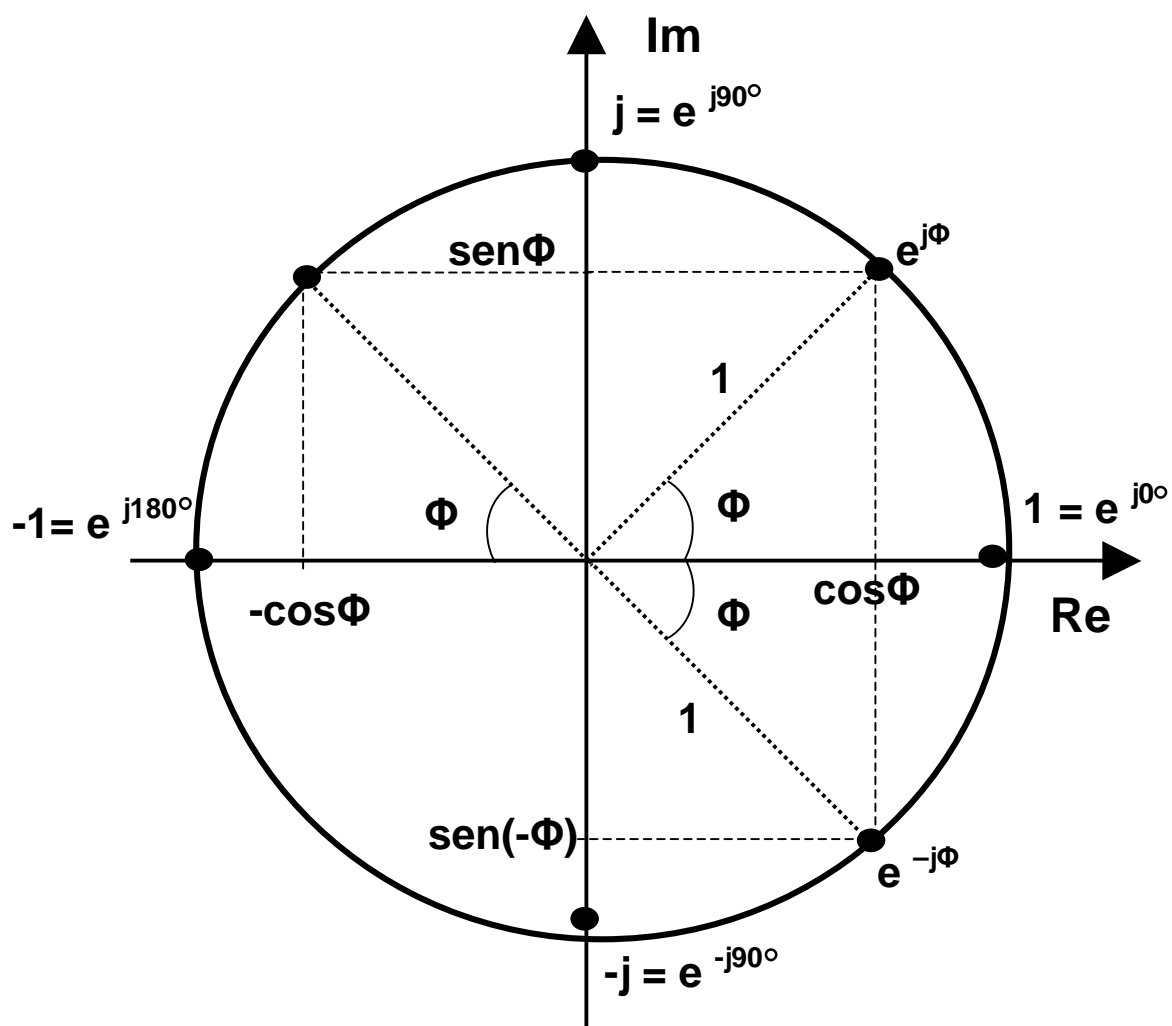
Conjugados

Plano Complexo



Círculo Unitário

Plano Complexo



Círculo Unitário

FASORES

$$\mathbf{A_m \cos (\omega t + \theta) =}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{A}}_m e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{A}}_m^* e^{-j\omega t} \right) \\ \mathbf{Re} \left[\hat{\mathbf{A}}_m e^{j\omega t} \right] \end{array} \right.$$

Valor instantâneo do sinal →

Domínio do tempo →

$$\mathbf{s(t) = A_m \cos (\omega t + \theta)}$$

Fasor associado a sinal senoidal:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A_m e^{j\theta} = A_m \angle \theta}$$

CO-SENÓIDES E FASORES

Função co-senoidal no domínio do tempo:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$Y_m > 0, \omega > 0$$

Fasor que a representa:

- Expressar a função como **parte real do complexo**:

$$\Re[Y_m e^{j(\omega t + \theta)}] = \Re[Y_m e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}]$$

- O **fasor** representativo dessa **função** será definido por:

$$\hat{Y} = Y_m e^{j\theta}$$

$$Y_m = |\hat{Y}|, \theta = \arg \hat{Y}$$

- Notação de **Kennely**:

$$\hat{Y} = Y_m \angle \theta$$

- ❖ ângulo θ pode ser fornecido em graus ou radianos
- ❖ frequência ω deve ser dada à parte
- ❖ o módulo e o ângulo do fasor são, respectivamente, a amplitude e fase da função co-senoidal

CO-SENÓIDES E FASORES

Função co-senoidal representada por fasor:

Dados um **fasor** e sua frequência, determinar a correspondente **função do tempo**:

- Escrever o **fasor** na forma exponencial:

$$\hat{Y} = Y_m e^{j\theta}$$

- Adicionar a informação de **frequência**:

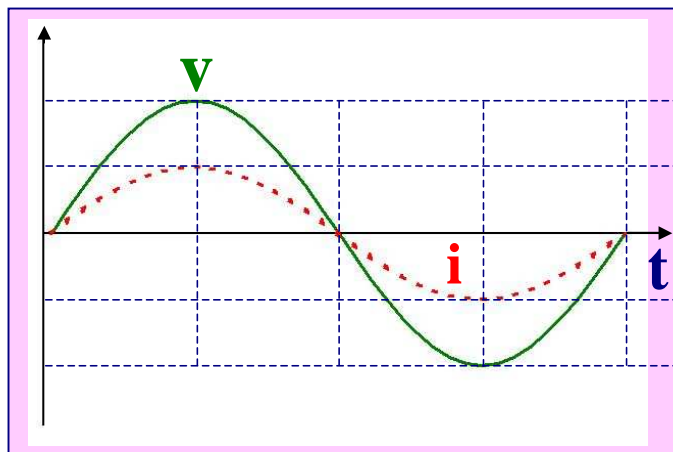
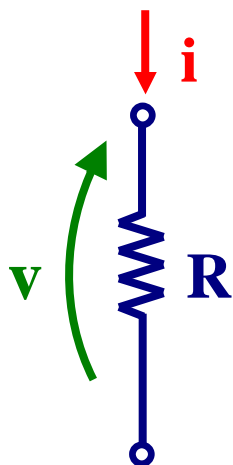
$$\hat{Y} e^{j\omega t} = Y_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

- Tomar a parte real desta expressão:

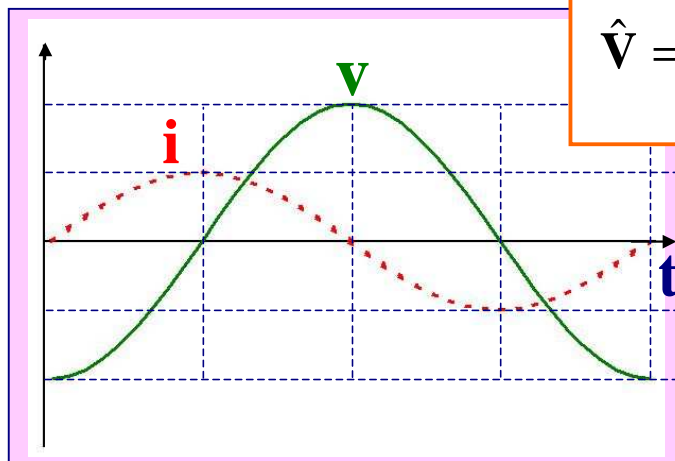
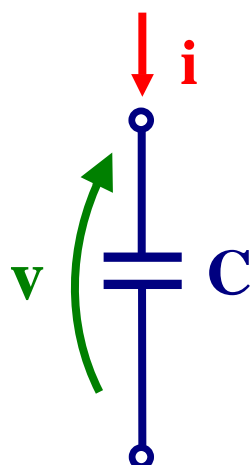
$$y(t) = \Re[Y_m e^{j(\omega t + \theta)}] = Y_m \cos(\omega t + \theta)$$

O módulo e o ângulo do **fasor** são, respectivamente, a amplitude e a defasagem da **função $y(t)$**

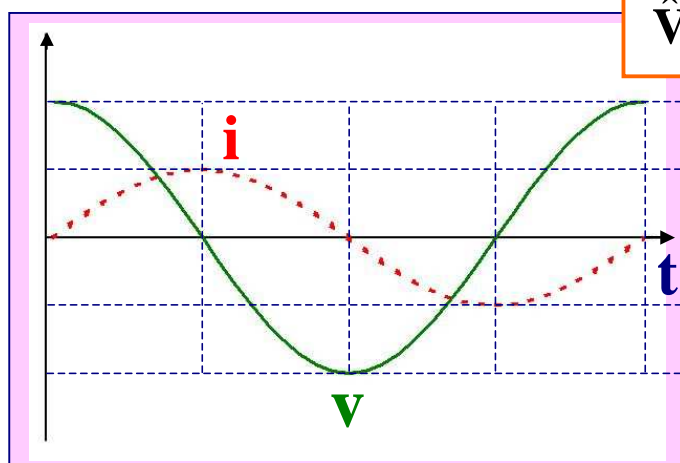
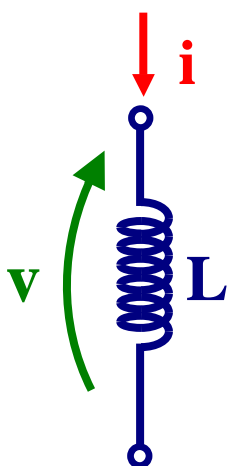
Relações v - i senoidais nos bipolos ideais



$$\hat{V} = R\hat{I}$$



$$\hat{V} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}$$

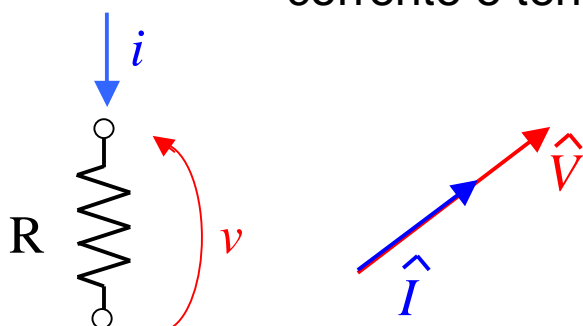


$$\hat{V} = j\omega L \hat{I}$$

DIAGRAMAS FASORIAIS NOS ELEMENTOS BÁSICOS DE CIRCUITOS

Resistências

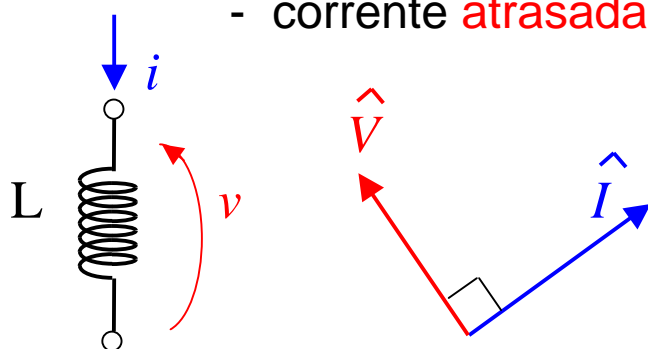
- corrente e tensão **em fase**



$$\hat{V} = R \hat{I}$$

Indutâncias

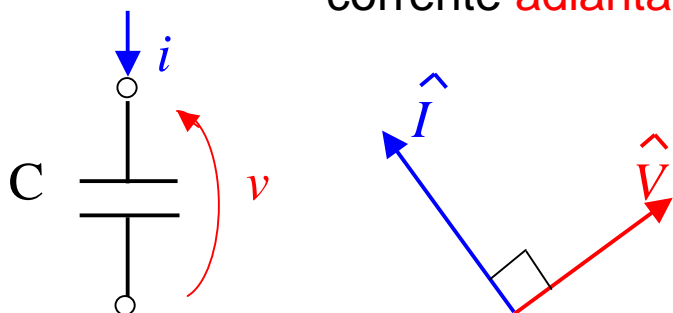
- corrente **atrasada** de $\pi/2$



$$\hat{V} = j \omega L \hat{I}$$

Capacitâncias

- corrente **adiantada** de $\pi/2$



$$\hat{V} = -j \hat{I} / (\omega C)$$

Relações Fasoriais \hat{V} - \hat{I}

Resistor

$$\hat{V} = R\hat{I}$$

$$\hat{I} = G\hat{V}$$

Capacitor

$$\hat{V} = -j\frac{1}{\omega C}\hat{I}$$

$$\hat{I} = j\omega C\hat{V}$$

Indutor

$$\hat{V} = j\omega L\hat{I}$$

$$\hat{I} = -j\frac{1}{\omega L}\hat{V}$$

Impedância: $Z = \hat{V} / \hat{I}$
Admitância: $Y = \hat{I} / \hat{V}$

Resistor

$$Z = R$$

$$Y = G$$

Capacitor

$$Z = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y = j\omega C$$

Indutor

$$Z = j\omega L$$

$$Y = \frac{1}{j\omega L}$$

Excitação Co-senoidal

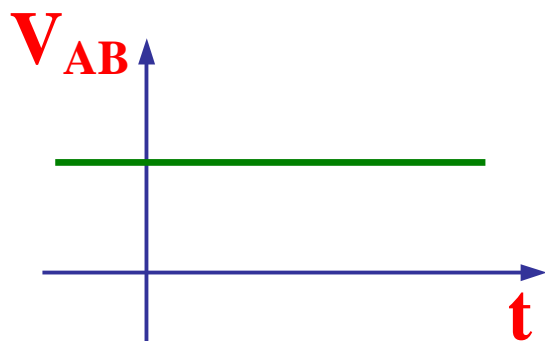
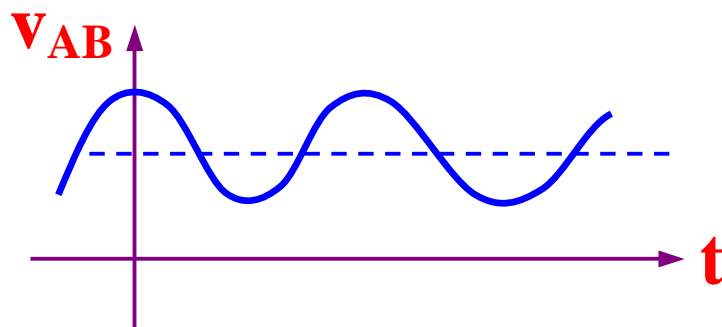
$$f(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) = A_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$$

$$\sin a = \cos(a - 90^\circ) \quad *$$

$$\sin a = \cos(90^\circ - a)$$

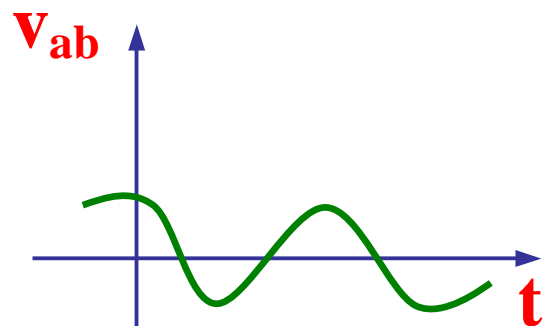
$$a = \omega t + \phi$$

Co-senóide + DC \rightarrow



Componente Contínua
DC

+



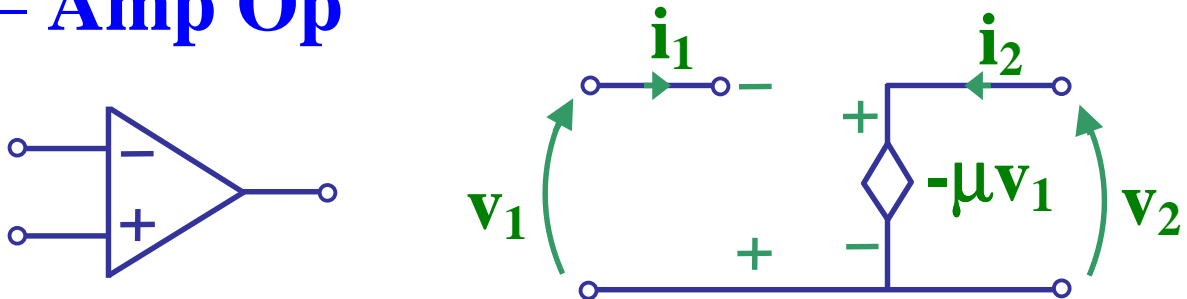
Componente incremental
AC (alternativa)

Valor Médio

$$V_{AB} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AB} dt$$

QUADRIPOLOS

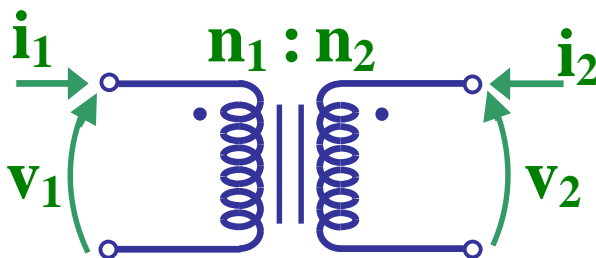
– Amp Op



$$\begin{cases} v_2 = -\mu v_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

$\mu \rightarrow$ ganho de tensão

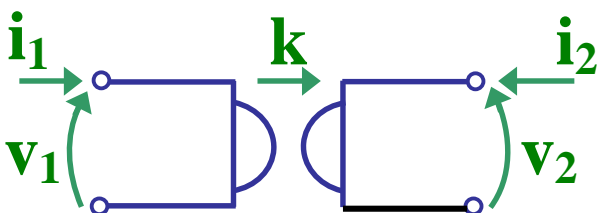
– Trafo ideal



$$\begin{cases} v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 \\ i_2 = -\frac{n_1}{n_2} i_1 \end{cases}$$

$n_1 / n_2 =$ relação de transformação

– Girador ideal



$$\begin{cases} v_1 = k i_2 \\ v_2 = -k i_1 \end{cases}$$



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 2

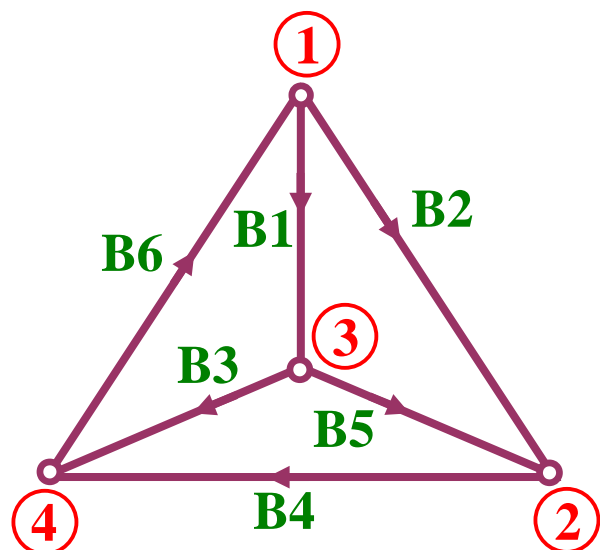
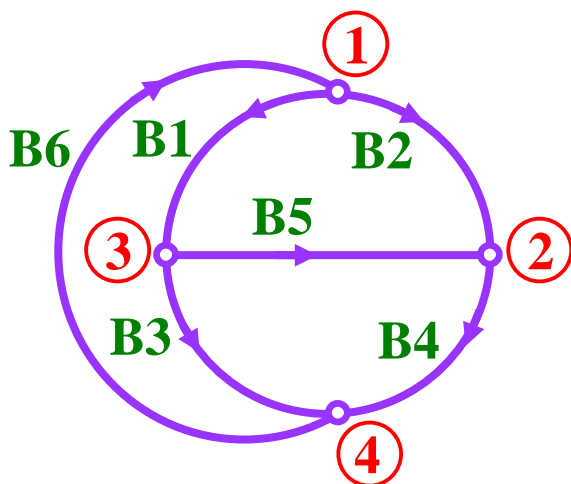
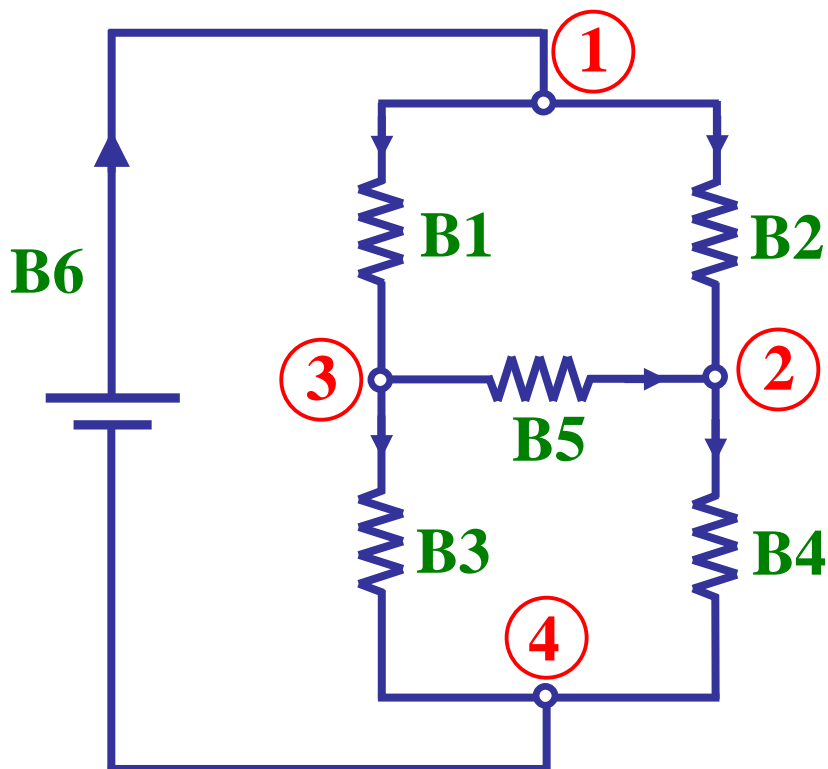
Associações de Bipolos e Leis de Kirchhoff

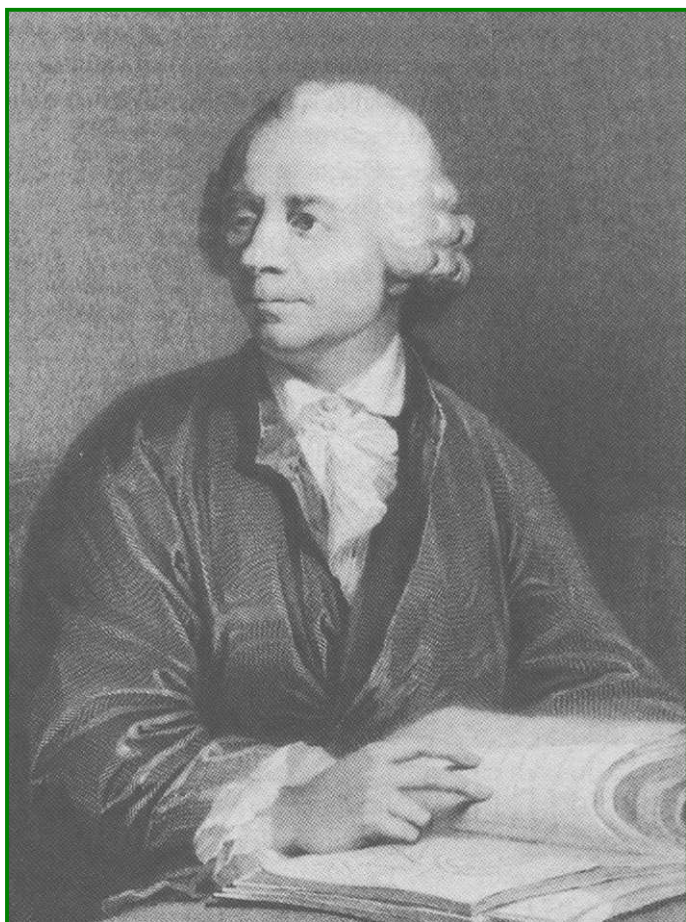
L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

Circuito em Ponte e Grafos Associados

→ Topologia do Circuito

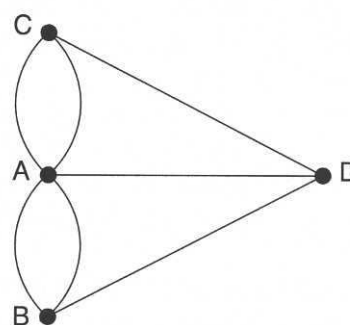
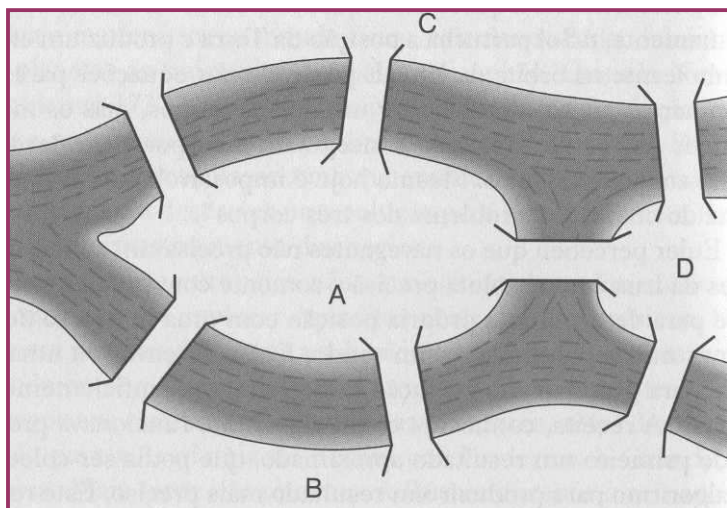




Leonard Euler (1707-1783)

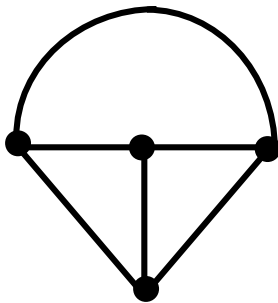
Matemático suíço, produziu cerca de 900 monografias em matemática, música, astronomia, mecânica, ótica, etc...Viveu muito tempo em São Petesburgo (Rússia), protegido pela czarina Catarina, a Grande. Perdeu um olho, e sofreu de cegueira crescente.

Problema da Ponte de Königsberg (1736)



Topologia

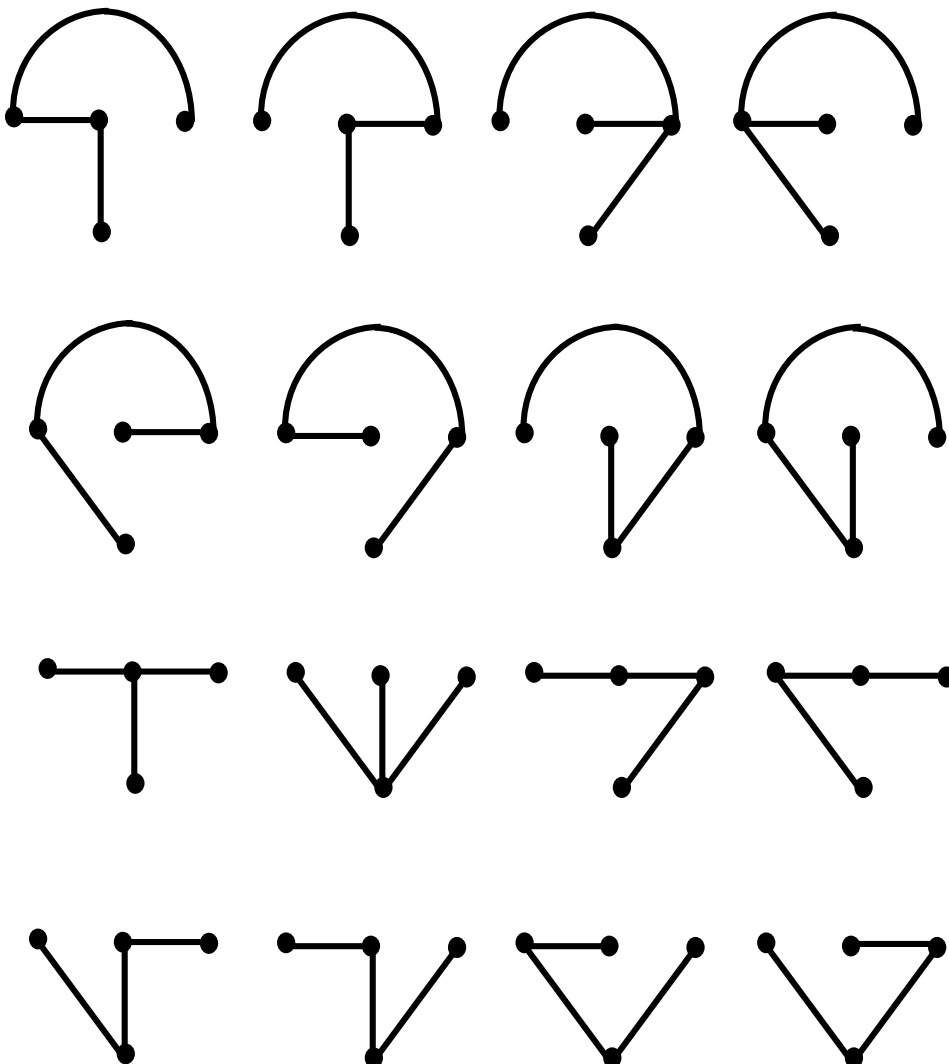
GRAFOS



Número de nós = $n_t = 4$
 Número de Ramos = $r = 6$
 Ramos de árvore = 3
 Ramos de ligação = 3

Número de árvores =

$$n_t^{(nt-2)} = 16$$



DEFINIÇÕES DE SUB-GRAFO

- **ÁRVORE** (de grafo conexo) : sub-grafo conexo que contém todos os nós + conjunto de ramos suficiente para interligar os nós \Rightarrow nenhum percurso fechado.
- **LAÇO** : qualquer sub-grafo conexo tal que 2 e apenas 2 ramos incidem em cada nó; 2 nós pertencem a cada ramo \Rightarrow trajetória fechada.
- **CORTE** (ou conjunto de corte) (de grafo conexo) : conjunto de ramos tal que se todos são removidos, o grafo fica dividido em 2 partes; se todos são removidos menos 1, o grafo se mantém conexo.

TEOREMA BÁSICO DAS ÁRVORES

Grafo Conexo com n_t nós e r ramos:

- Há um caminho único entre qualquer par de nós em uma árvore

- $n = n_t - 1$ Ramos de árvores

$$l = r - n_t + 1 \text{ Ramos de ligação}$$

- cada ramo de ligação \Rightarrow um único laço fundamental

l laços fundamentais

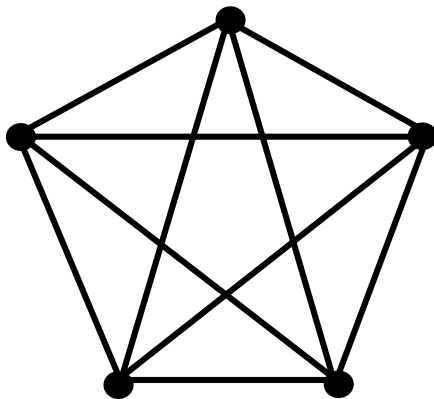
- Cada ramo de árvore \Rightarrow um único corte fundamental

n cortes fundamentais

Grafos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Planares} \\ \text{Não-planares} \end{array} \right.$

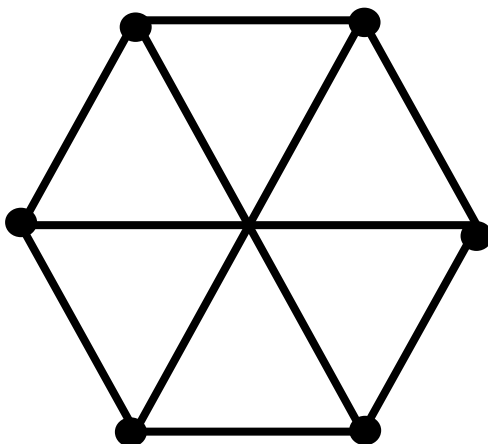
Os grafos não-planares contêm como sub-grafo pelo menos um dos:

GRAFOS DE KURATOVSKY



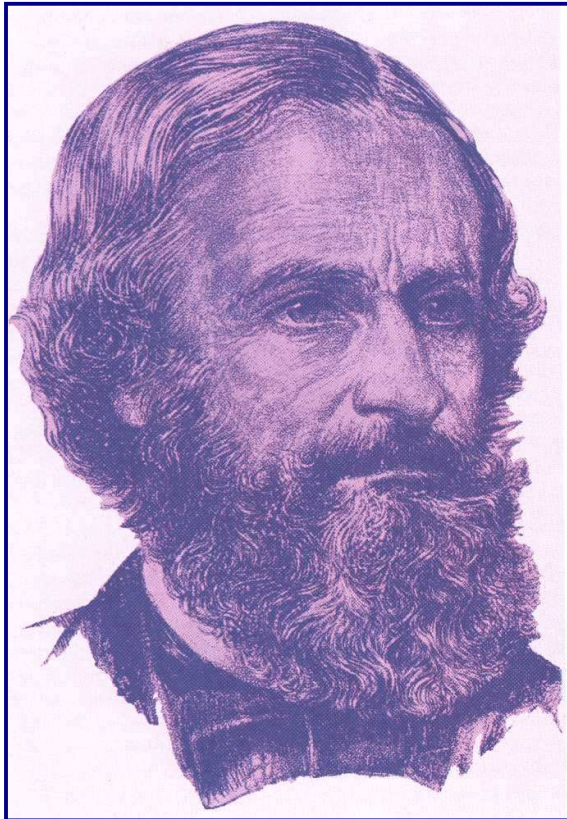
5 nós

10 ramos



6 nós

9 ramos



**Gustav Robert
Kirchhoff
(1824-1887)**

Físico alemão, publicou seu trabalho sobre correntes e tensões elétricas em 1847. Realizou pesquisas com Robert Bunsen, que resultaram na descoberta do cézio e do rubídio.

1ª. Lei : Correntes (nós e cortes)

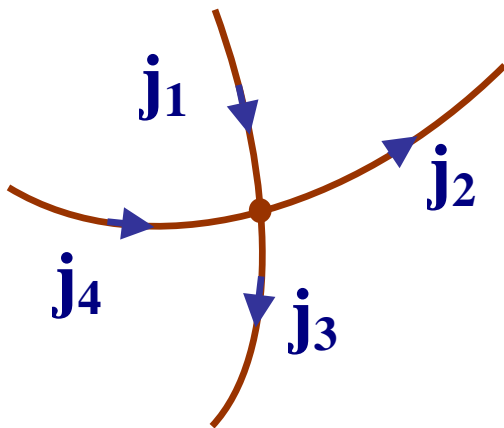
$$\sum_k \pm j_k(t) = 0$$

2ª. Lei : Tensões (laços e malhas)

$$\sum_k \pm v_k(t) = 0$$

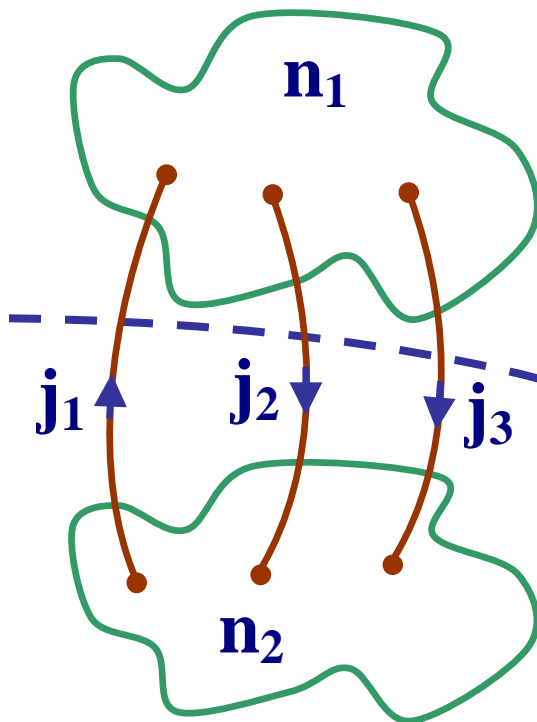
1a. Lei de Kirchhoff

- Aplicada a um nó:



$$-j_1 + j_2 + j_3 - j_4 = 0$$

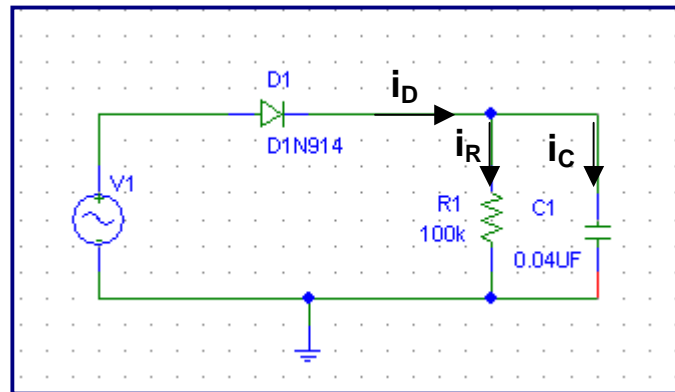
- Aplicada a um corte:



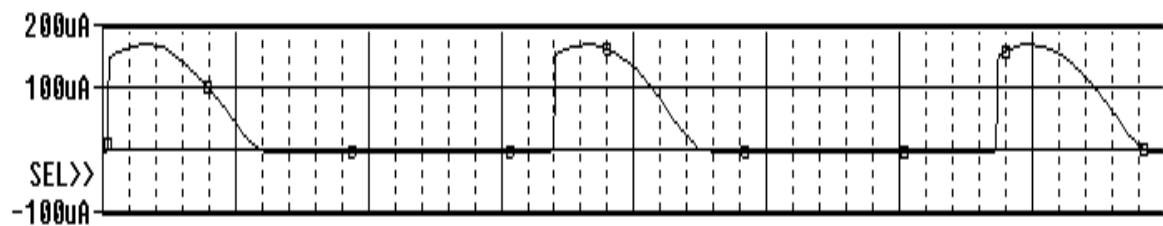
$$j_1 - j_2 - j_3 = 0$$

orientação do
corte

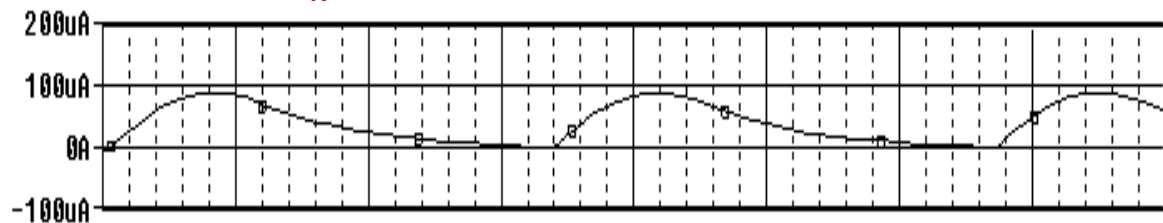
Circuito com Diodo



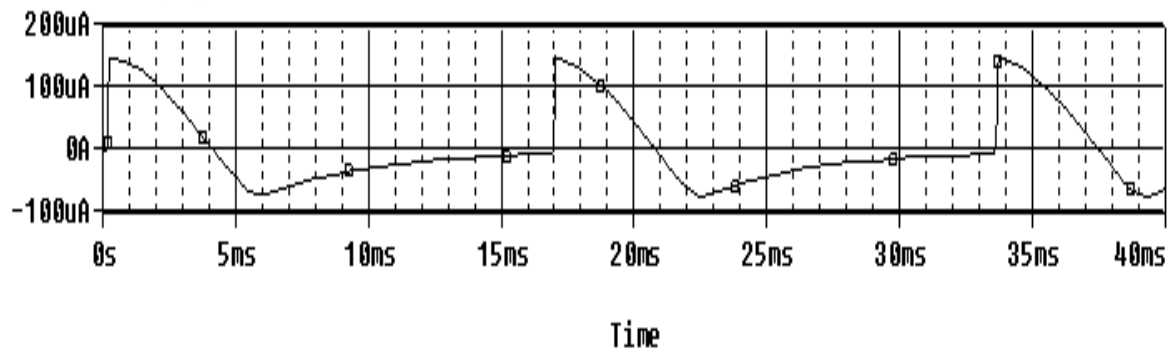
i_D



i_R

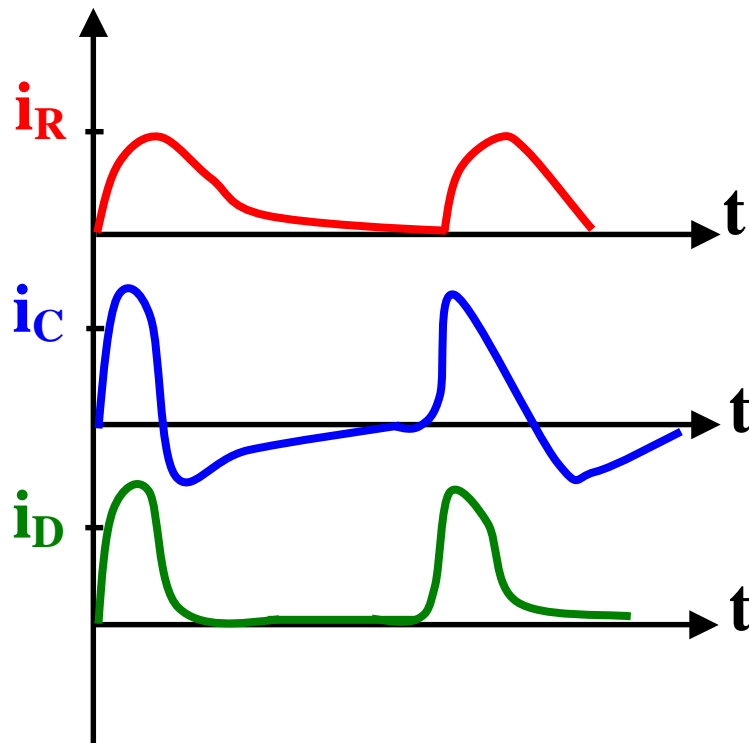
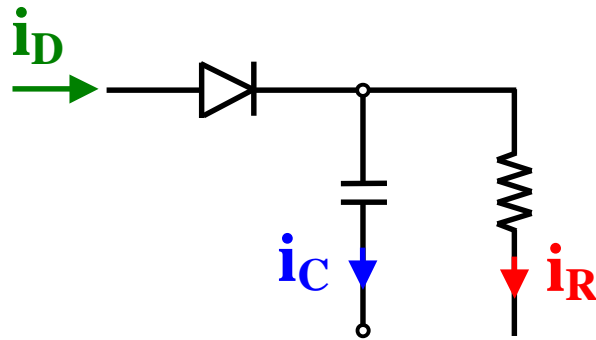


i_C



Simulação com o PSpice

1a. Lei de Kirchhoff



$$i_C + i_R - i_D = 0$$

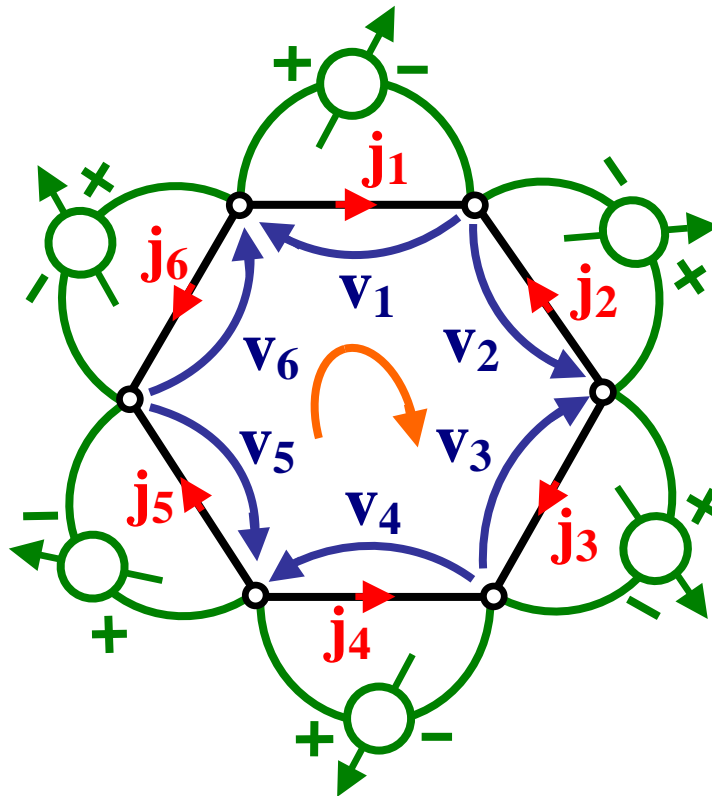
$$i_D = i_C + i_R$$

2a. Lei de Kirchhoff

Aplicada a laços :

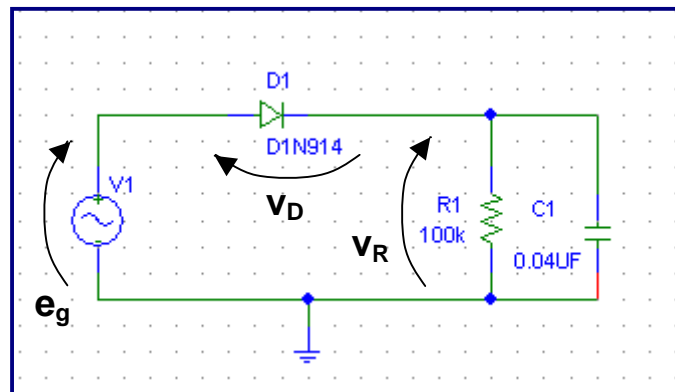
$$\sum_{i=1}^{\ell} \left[\pm v_i(t) \right] = 0 \quad \forall t$$

$\ell = n^o$ de ramos no laço

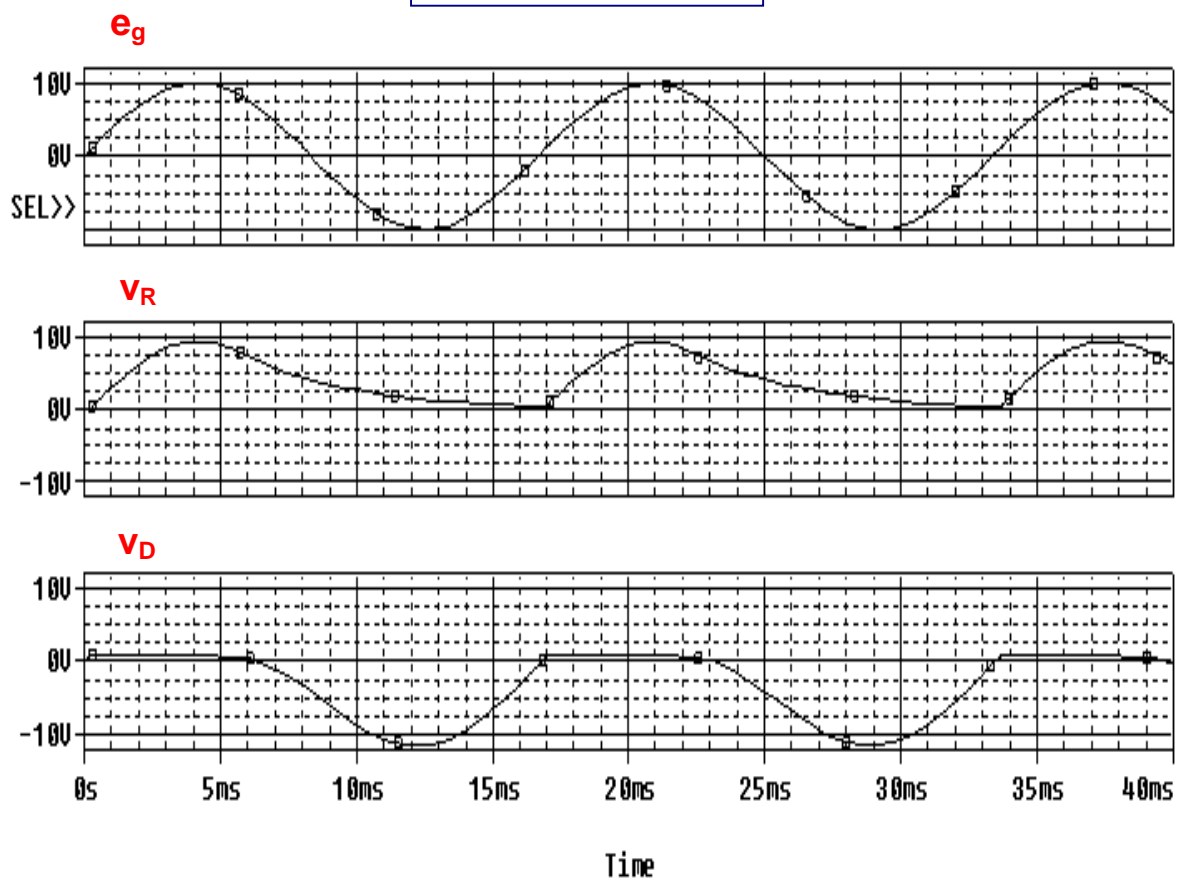


$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 = 0$$

Circuito com Diodo



$$e_g = V_R + V_D$$



Simulação com o PSpice

FASORES

$$\mathbf{A_m \cos (\omega t + \theta) =}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{A}}_m e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{A}}_m^* e^{-j\omega t} \right) \\ \mathbf{Re} \left[\hat{\mathbf{A}}_m e^{j\omega t} \right] \end{array} \right.$$

Valor instantâneo do sinal →

Domínio do tempo →

$$\mathbf{s(t) = A_m \cos (\omega t + \theta)}$$

Fasor associado a sinal senoidal:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A_m e^{j\theta} = A_m \underline{\theta}}$$

Forma Fasorial das Leis de Kirchhoff

1ª Lei K.:

$$\sum_k \pm \hat{\mathbf{J}}_k = 0$$

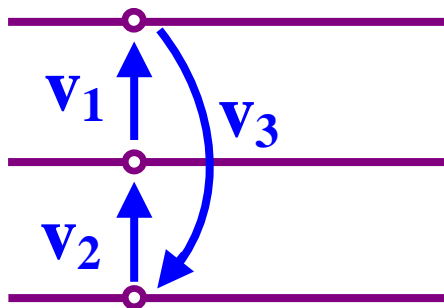
em cada nó

2ª Lei K.:

$$\sum_k \pm \hat{\mathbf{V}}_k = 0$$

em um laço

Exemplo: Linha Trifásica



$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$v_2(t) = V_m \cos(\omega t + 150^\circ)$$

$$v_3(t) = V_m \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$\hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_2 + \hat{\mathbf{V}}_3 = 0$$

Propriedade Trigonométrica

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = c \cos (\omega t + \theta)$$

$$= c \cos \omega t \cos \theta - c \sin \omega t \sin \theta$$

$$a = -c \sin \theta$$

$$b = c \cos \theta$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{-a}{b} \right)$$

Propriedade Importante

$$s(t) = A_1 \cos (\omega t + \theta_1) + A_2 \cos (\omega t + \theta_2) \\ + \dots + A_n \cos (\omega t + \theta_n)$$

$$\hat{A}_1 = A_1 \angle \theta_1$$

$$\hat{A}_2 = A_2 \angle \theta_2$$

⋮

$$\hat{A}_n = A_n \angle \theta_n$$

Então:

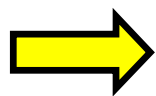
$$\hat{S} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n$$

Fasores

Propriedade Importante:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t)$$

$s_i(t)$ sinais senoidais
mesma frequência



$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \dots + \hat{S}_n$$

Cuidado !!!

Se $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$

$$\hat{S} \neq \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Fasores

$$s(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \cdot A_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= A_1 \angle \theta_1 \\ \hat{A}_2 &= A_2 \angle \theta_2\end{aligned}$$

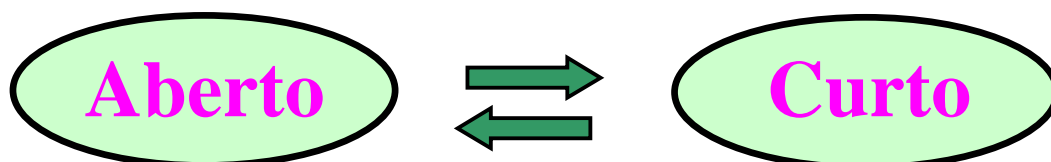
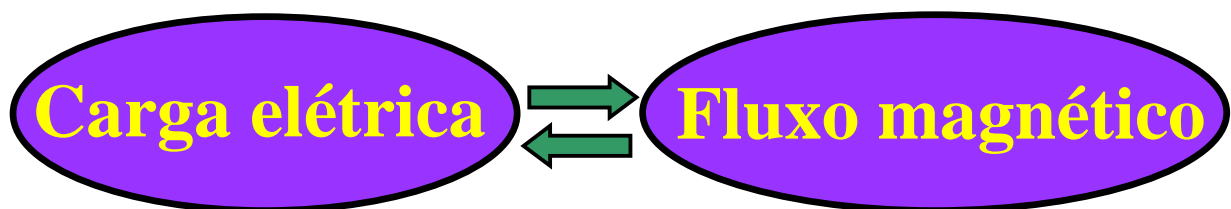
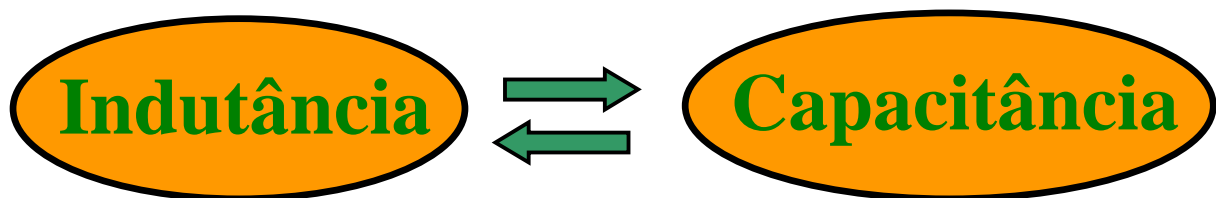
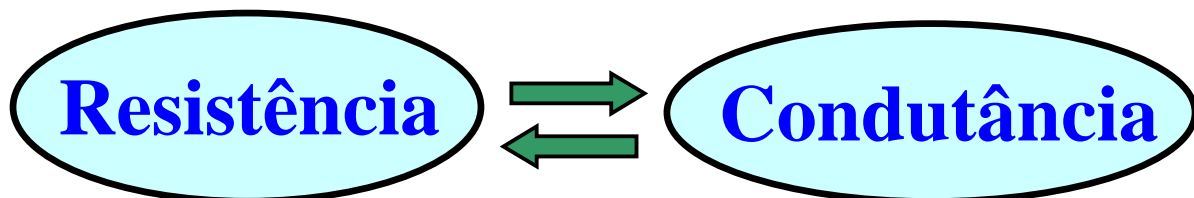
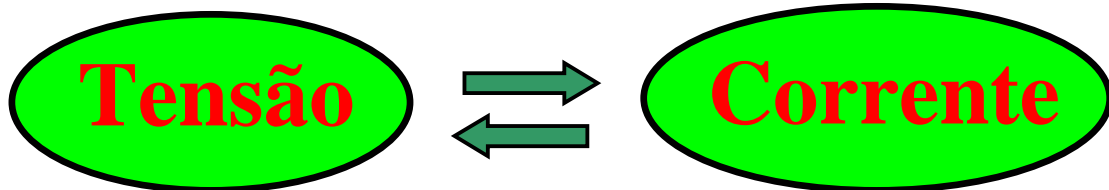
Então:

$$\hat{S} \neq \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$$

Lembrar que:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

DUALIDADE





Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 3

Análise Nodal e suas Variantes; Análise de Malhas

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

ANÁLISE DE REDES

► *ANÁLISE NODAL* \Rightarrow

1a. Lei de Kirchhoff em NÓS

► *ANÁLISE DE MALHAS* \Rightarrow

2ª. Lei de Kirchhoff MALHAS

► *ANÁLISE DE CORTES* \Rightarrow

**1ª. Lei Kirchhoff CORTES
FUNDAMENTAIS**

► *ANÁLISE DE LAÇOS* \Rightarrow

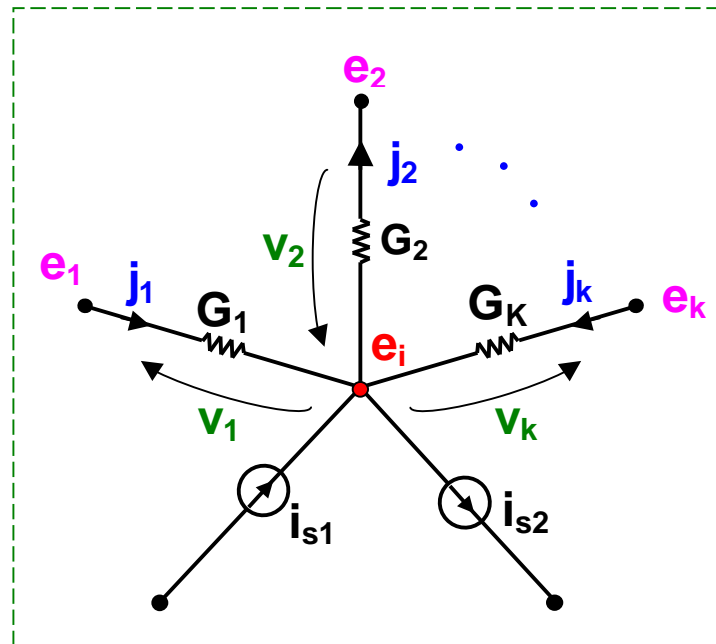
**2ª. Lei Kirchhoff LAÇOS
FUNDAMENTAIS**

Etapas da Análise Nodal

1. Definir ramos e nós
2. Escolher nó de referência (“terra”)
3. Definir tensões nodais
4. Aplicar a 1a. Lei de Kirchhoff a cada nó, exceto o de referência
5. Expressar as correntes de ramo em função das tensões nodais
6. Ordenar as equações em relação às tensões nodais
7. Compor a equação matricial relacionando tensões nodais e excitações

ANÁLISE NODAL

Nó Genérico i:



1ª. Lei de Kirchhoff:

$$-j_1 + j_2 + \dots - j_k = i_{s1} - i_{s2}$$

Relações Constitutivas j/v (Lei de Ohm):

$$-G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots - G_k v_k = i_{s1} - i_{s2}$$

Relações tensões de ramo / tensões nodais:

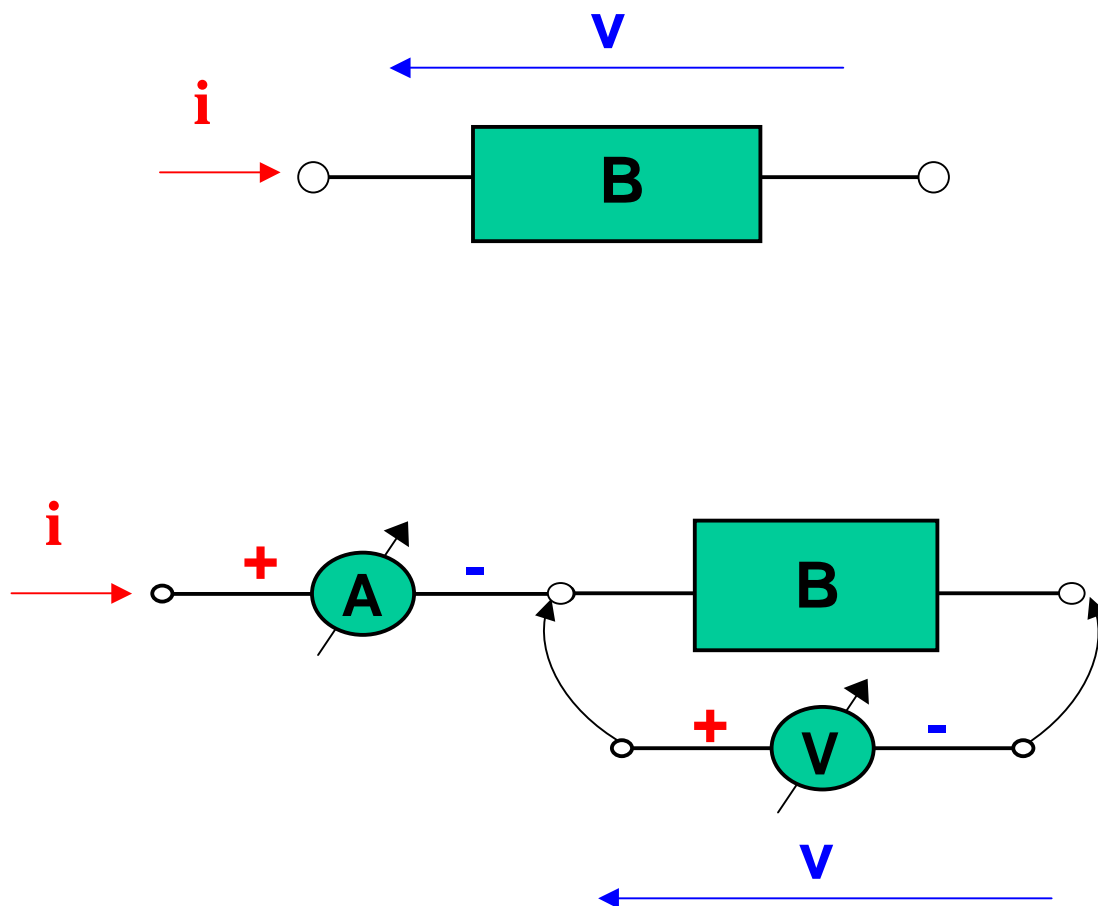
$$-G_1(e_1 - e_i) + G_2(e_i - e_2) + \dots - G_k(e_k - e_i) = i_{s1} - i_{s2}$$

Resultado:

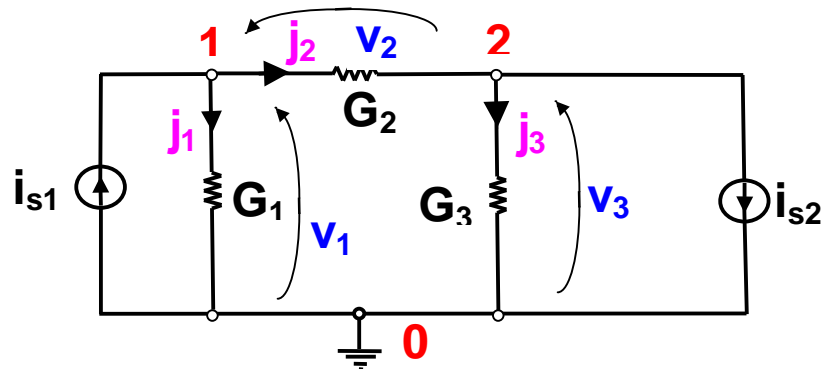
$$-G_1 e_1 - G_2 e_2 + (G_1 + G_2 + \dots + G_k) e_i + \dots - G_k e_k = i_{s1} - i_{s2}$$

Sentidos de Referências (Flechas) de Correntes e Tensões nos Bipolos

São regras para Ligar Amperímetros e Voltímetros:



Exemplo de Análise Nodal



1ª. Lei de Kirchhoff nos nós:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nó 1 : } j_1 + j_2 - i_{s1} = 0 \\ \text{Nó 2 : } -j_2 + j_3 + i_{s2} = 0 \end{array} \right.$$

Relações Constitutivas j/v e
relações tensão de ramo / tensões nodais:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1 = G_1 v_1 = G_1 e_1 \\ j_2 = G_2 v_2 = G_2 (e_1 - e_2) \\ j_3 = G_3 v_3 = G_3 e_2 \end{array} \right.$$

Resultado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nó 1 : } G_1 e_1 + G_2 e_1 - G_2 e_2 - i_{s1} = 0 \\ \text{Nó 2 : } -G_2 e_1 + G_2 e_2 + G_3 e_2 + i_{s2} = 0 \end{array} \right.$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 \\ -G_2 & (G_2 + G_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{G}_n \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}$$

ANÁLISE NODAL DE REDES RESISTIVAS LINEARES

Equação Geral

$$\underset{\sim}{G}_n \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}(t)$$

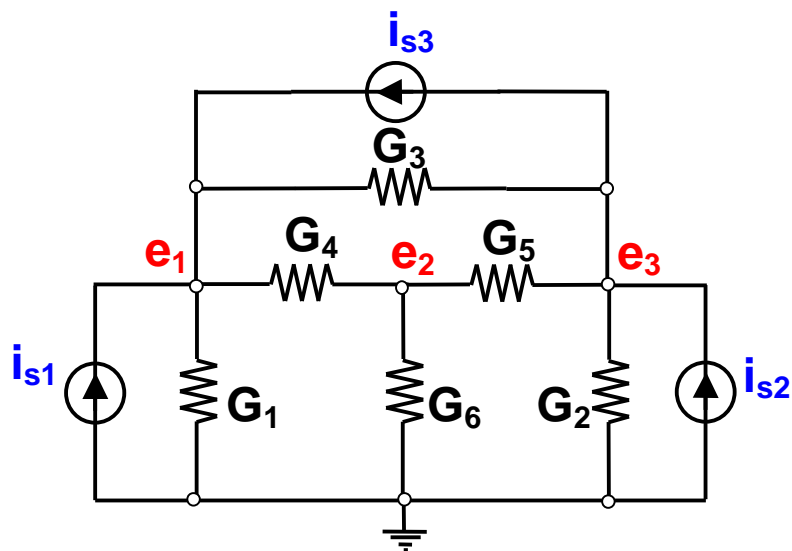
$\underset{\sim}{G}_n$ - *Matriz das condutâncias nodais*

$\underset{\sim}{e}(t)$ - *vetor das tensões nodais*

$\underset{\sim}{i}_{sn}(t)$ - *vetor das fontes de corrente*

Sistema Algébrico Linear

Exemplo de Análise Nodal



Equação matricial de análise nodal:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3 + G_4) & -G_4 & -G_3 \\ -G_4 & (G_4 + G_5 + G_6) & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & (G_2 + G_3 + G_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} + i_{s3} \\ 0 \\ i_{s2} - i_{s3} \end{bmatrix}$$

ANÁLISE NODAL

➤ r tensões e r correntes desconhecidas



- Expressar r tensões de ramos em função das $(n-1)$ tensões nodais → 2ª Lei de Kirchhoff



➤ $(n-1)$ tensões e r correntes desconhecidas



- Expressar r correntes de ramos em função das $(n-1)$ tensões nodais → Lei de Ohm



➤ $(n-1)$ tensões desconhecidas



- Escrever $(n-1)$ equações independentes e resolver → 1ª Lei de Kirchhoff



RESPOSTA



Quando ramo = fonte de corrente →

➤ r tensões e $(r-1)$ correntes desconhecidas

ANÁLISE NODAL EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

$$Y_n(j\omega) \cdot \underset{\sim}{\hat{E}} = \underset{\sim}{\hat{I}}_{sn}$$

$Y_n(j\omega)$ - *Matriz de admitâncias nodais*

Admitâncias:

$$Y = \frac{\hat{I}}{\hat{V}}$$

$$G$$

$$j\omega C$$

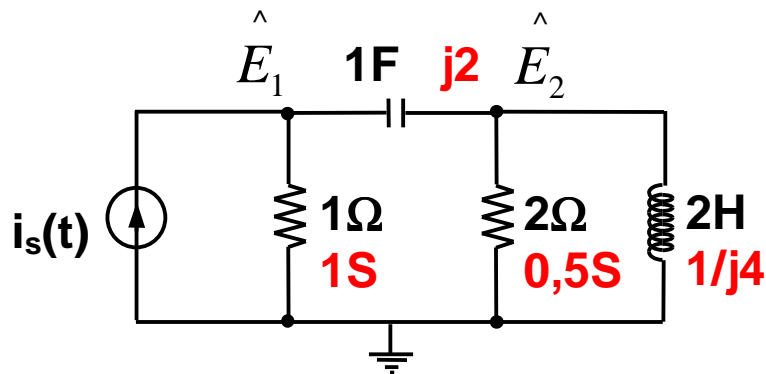
$$\frac{1}{j\omega L}$$

$\underset{\sim}{\hat{E}}$ - *vetor dos fasores das tensões nodais*

$\underset{\sim}{\hat{I}}_{sn}$ - *vetor dos fasores das fontes de corrente nodais*

**Sistema de Equações
Algébricas Complexas**

Exemplo de Análise Nodal em RPS



$$i_s(t) = 10 \cos(2t + 45^\circ)$$

$$\hat{I}_s = 10 \angle 45^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j2 & -j2 \\ -j2 & 0,5 + j2 - j0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_1 = 6,22 \angle 49^\circ$$

$$\hat{E}_2 = 6,83 \angle 65^\circ$$

ANÁLISE NODAL MODIFICADA

Incógnitas:

1 - Tensões **nodais**

2 - Correntes nos ramos

tipo impedância:

- indutores
- geradores ideais de tensão, independentes ou vinculados
- correntes controladoras de geradores vinculados

Equações:

◆ 1a. L. K. nos ***nós independentes***

◆ 2a. L. K. nos ***ramos tipo impedância***

ANÁLISE NODAL MODIFICADA

Obtenção das Equações:

- Aplicar a 1^a. L.K. aos nós independentes e eliminar as correntes nos ramos tipo admitância, em função das tensões nodais
- Aplicar a 2^a. L.K. aos ramos tipo impedância, mantendo suas correntes como incógnitas
- Ordenar as equações, nos dois tipos de incógnitas: tensões nodais e correntes dos ramos tipo impedância

Análise Nodal Modificada

Redes Resistivas

$$\left[\begin{array}{c|c} G_n & B \\ \hline F & -R \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} e \\ \hline i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} i_s \\ \hline e_s \end{array} \right]$$

} 1ª. L. K
} 2ª. L. K

Equações de 1ª.L.K. :

$$G_n \cdot e + B \cdot i = i_s$$

No. de equações = No. de **nós independentes**

Equações de 2ª.L.K. :

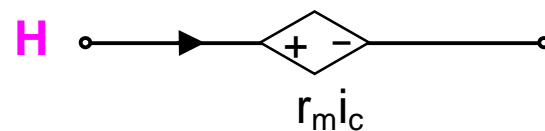
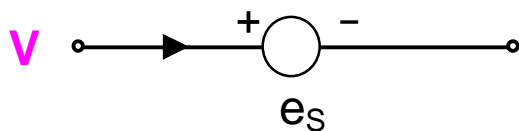
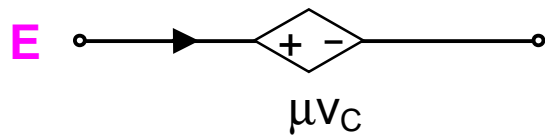
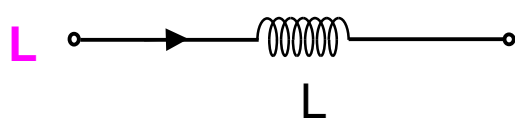
$$F \cdot e + R \cdot i = e_s$$

No. de equações = No. de **ramos tipo impedância**

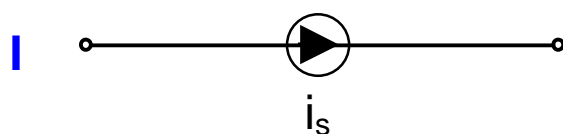
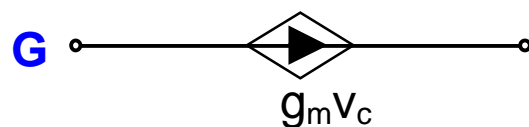
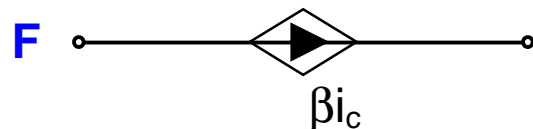
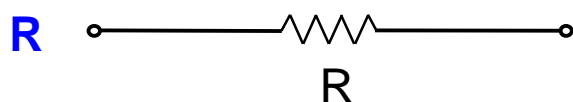
Análise Nodal Modificada

(Padrão SPICE)

• Ramos Tipo Impedância



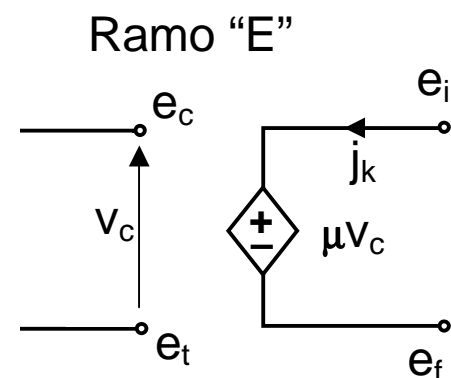
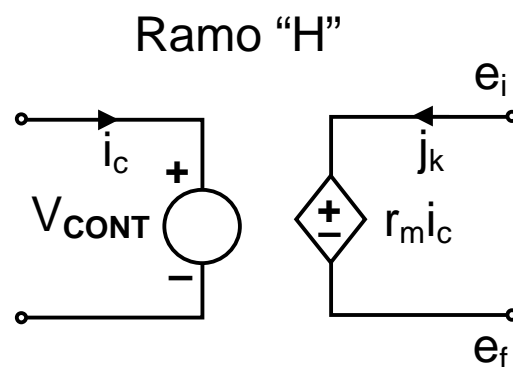
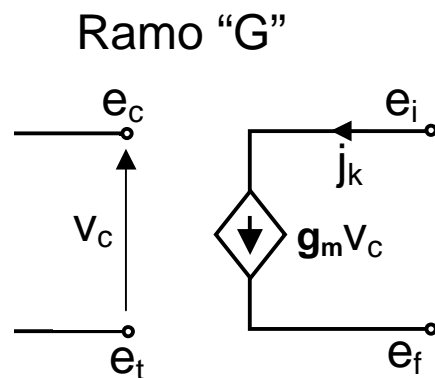
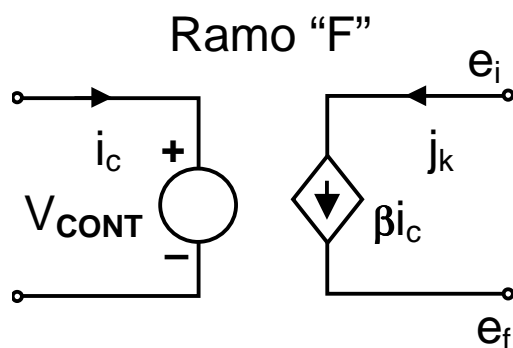
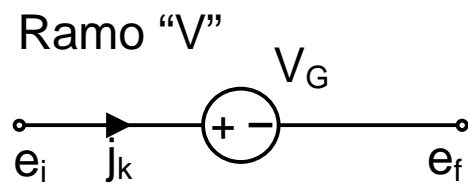
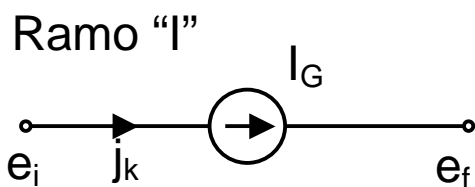
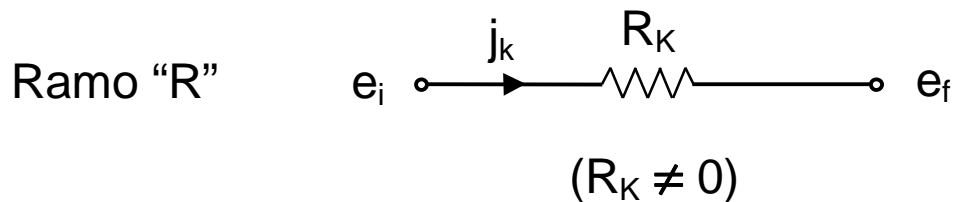
• Ramos Tipo Admitância



Programa Computacional para Análise de Circuitos

- *Descrição do Circuito (Entrada)*
- *Montagem da Matriz de ANM*
- *Solução do Sistema*
- *Saída da Solução Desejada*

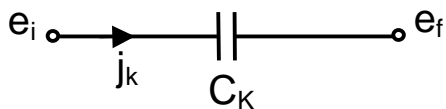
Ramos Típicos para Análise Computacional C.C. - SPICE



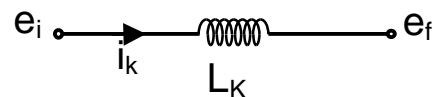
Programa PSPICE

Ramos para Análise C.A.

Ramo "C":

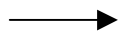


Ramo "L":



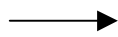
(i_k é corrente incógnita)

"C"



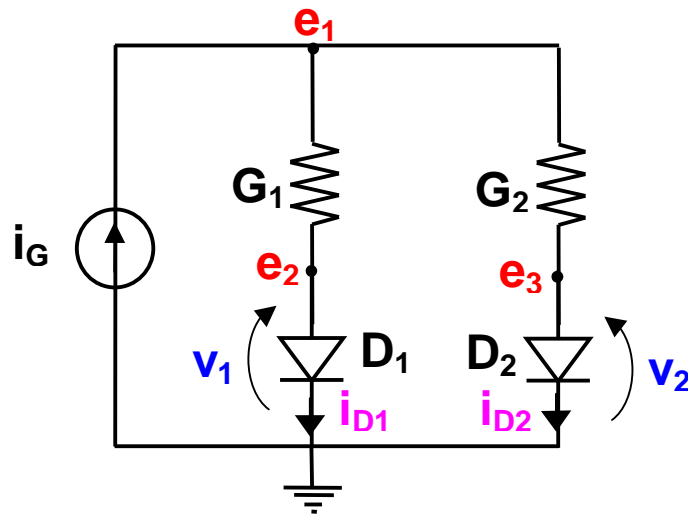
$$\hat{J}_k = j\omega C (\hat{E}_i - \hat{E}_f)$$

"L"



$$\hat{E}_i - \hat{E}_f - j\omega L \hat{I}_k = 0$$

Análise Nodal em Redes Não-Lineares



$$i_{Dk} = I_{sk} (e^{\lambda v_k} - 1)$$

Diodos $k=1,2$

1ª. Lei de Kirchhoff nos três nós independentes:

$$G_1(e_1 - e_2) + G_2(e_1 - e_3) = i_G$$

$$G_1(e_2 - e_1) + I_{s1}(e^{\lambda e_2} - 1) = 0$$

$$G_2(e_3 - e_1) + I_{s2}(e^{\lambda e_3} - 1) = 0$$

DUALIDADE

Tensão \leftrightarrow Corrente

Resistência (R) \leftrightarrow Condutância (G)

Indutância (L) \leftrightarrow Capacitância (C)

Carga Elétrica (Q) \leftrightarrow Fluxo Magnético (ψ)

Aberto \leftrightarrow Curto

Impedância (Z) \leftrightarrow Admitância (Y)

Série \leftrightarrow Paralelo

Nó \leftrightarrow Malha

ANÁLISE NODAL

ANÁLISE DE MALHAS

Nós

Malhas

Nó de Referência

Malha Externa

Incógnitas :

tensões nodais

correntes de malha

- 1ª. Lei de K.
aos nós não de
referência

- 2ª. Lei de K.
às malhas,
exceto externa

- Relações i/v
nos ramos

- Relações v/i
nos ramos

- Tensões nos
ramos →
tensões nodais

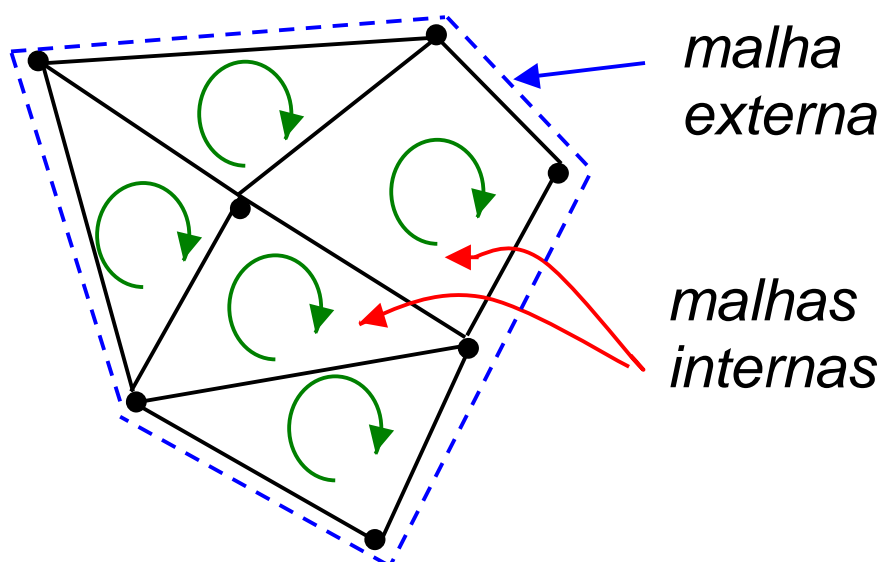
- Correntes nos
ramos →
correntes de
malhas

- Fontes de
corrente

- Fontes de
tensão

MALHAS DE REDES PLANARES

Malhas internas são **laços** que não contém nenhum ramo em seu interior.



 - **correntes de malha**

A cada malha interna se atribui uma **corrente de malha**.

ANÁLISE DE MALHAS

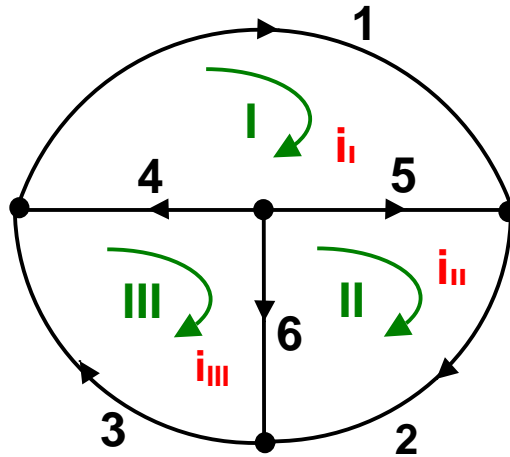


Gráfico Planar

malha I : { 1,4,5 }

malha II : { 2,5,6 }

malha III : { 3,4,6 }

malha externa : { 1,2,3 }

Relações corrente de ramo/correntes de malha:

$$j_1 = i_I$$

$$j_2 = i_{II}$$

$$j_3 = i_{III}$$

$$j_4 = i_I - i_{III}$$

$$j_5 = i_{II} - i_I$$

$$j_6 = i_{III} - i_{II}$$

Etapas da Análise de Malhas

1. Definir as malhas da rede planar
2. Atribuir uma **corrente de malha** a cada malha independente
3. Definir as equações de malha
4. Aplicar a **2a. Lei de Kirchhoff** a cada malha independente
5. Eliminar as tensões, usando **relações constitutivas v/j**
6. Expressar as correntes de ramo em função das **correntes de malha**
7. Ordenar as equações em relação às **correntes de malha**
8. Compor a **equação matricial** relacionando **correntes de malha** e excitações

ANÁLISE DE MALHAS DE REDES RESISTIVAS LINEARES

Equação Geral

$$\underset{\sim}{R}_m \cdot \underset{\sim}{i}(t) = \underset{\sim}{e}_{sm}(t)$$

$\underset{\sim}{R}_m$ - *Matriz das resistências de malha*

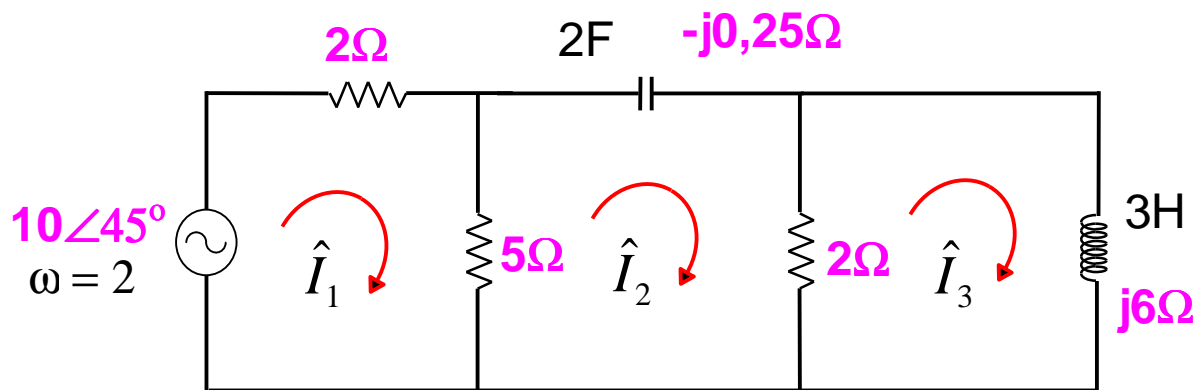
$\underset{\sim}{i}(t)$ - *vetor das correntes de malhas*

$\underset{\sim}{e}_{sm}(t)$ - *vetor das fontes de tensão*

Sistema Algébrico Linear

ANÁLISE DE MALHAS RPS

Exemplo



Impedâncias:

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}$$

$$R$$

$$j\omega L$$

$$\frac{1}{j\omega C}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 7 - j0,25 & -2 \\ 0 & -2 & 2 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 45^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,995\angle 41,76^\circ \\ 2,120\angle 38,81^\circ \\ 0,696\angle -32,75^\circ \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

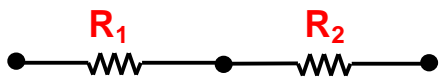
Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 - Capítulo 4

Redução de Redes e
Aplicações Tecnológicas de Redes Resistivas

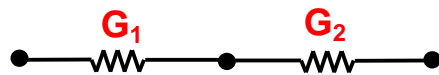
L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

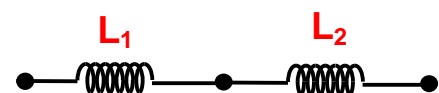
ASSOCIAÇÕES SÉRIE



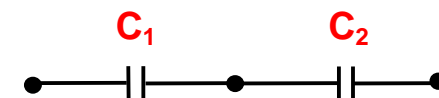
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



$$G_{eq} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

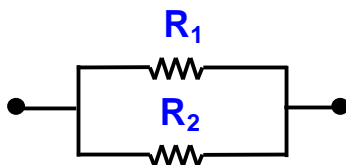


$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

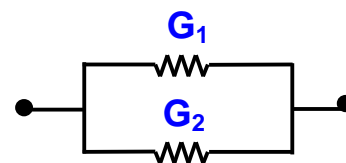


$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

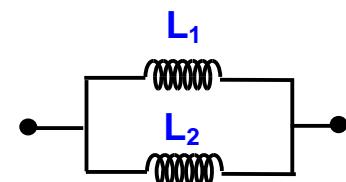
ASSOCIAÇÕES PARALELO



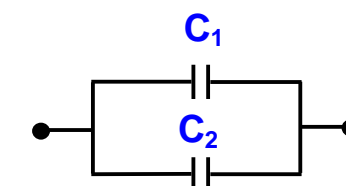
$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

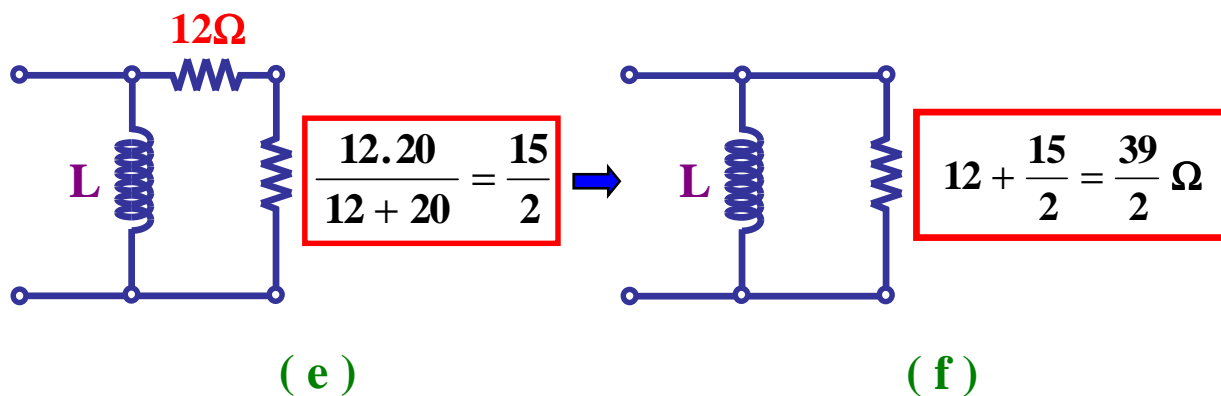
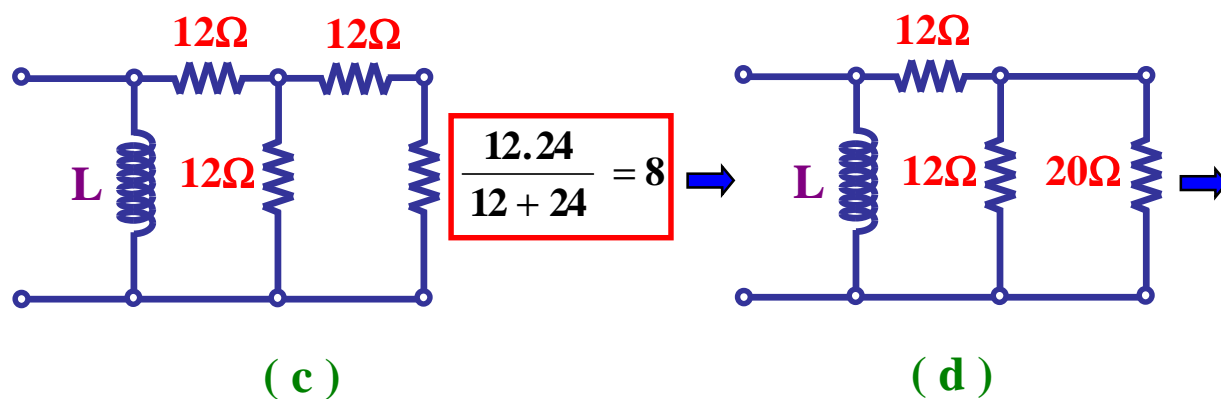
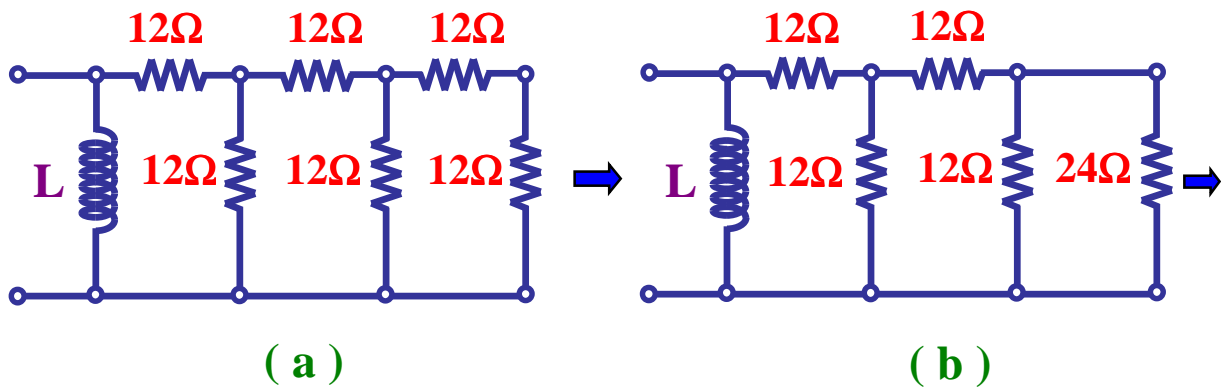


$$L_{eq} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

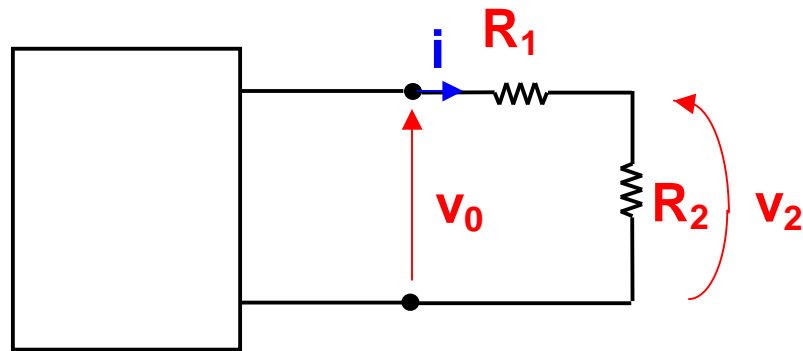


$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Exemplo de Associação de Elementos

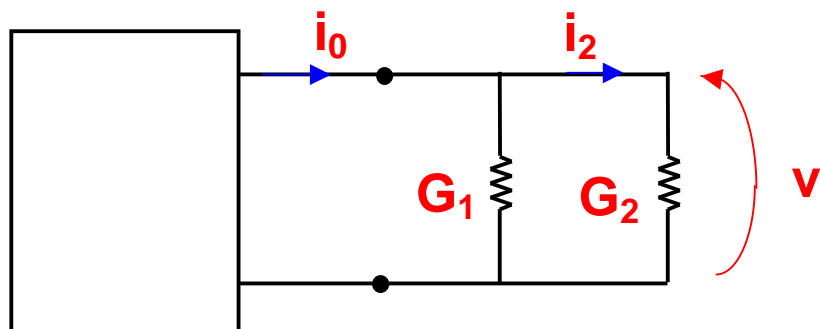


DIVISÃO DE TENSÃO



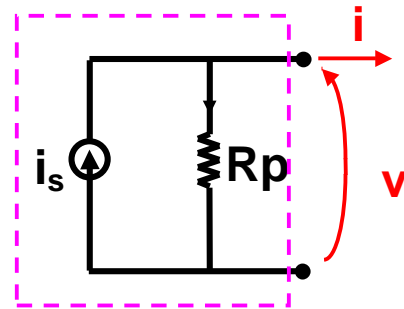
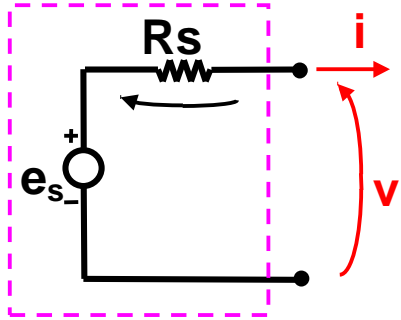
$$V_2 = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = i$$

DIVISÃO DE CORRENTE



$$i_2 = i_0 \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} = i_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V$$

FONTES EQUIVALENTES



$$v = e_s - R_s \cdot i$$

$$i = i_s - v / R_p$$

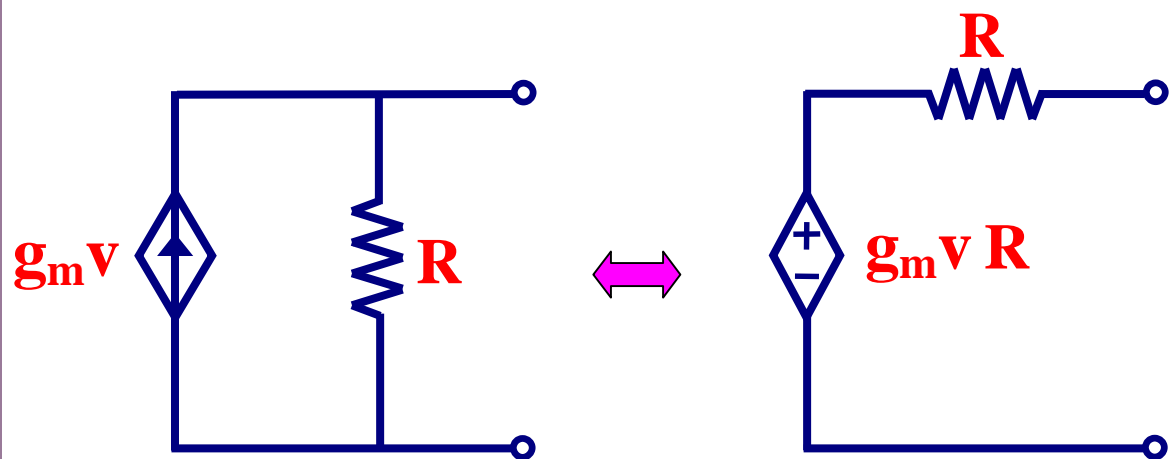
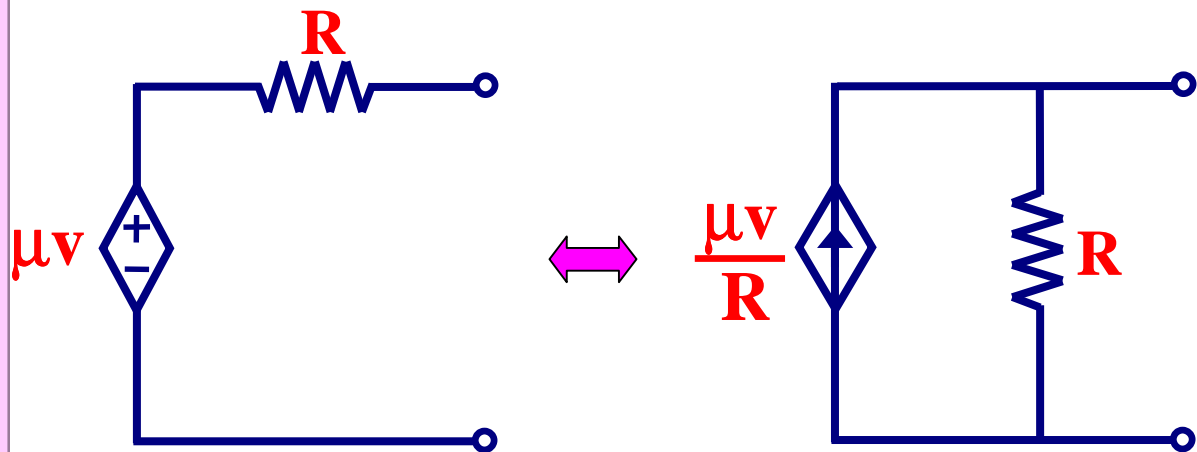
$$\Rightarrow v = R_p \cdot i_s - R_p \cdot i$$

$$e_s - R_s \cdot i = R_p \cdot i_s - R_p \cdot i$$

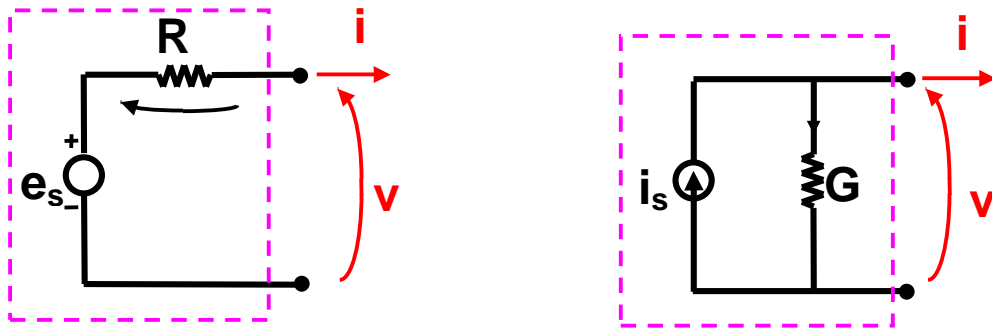
válido para $\forall v$ e $\forall i$ SE :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_p = R_s \\ R_p \cdot i_s = e_s \end{array} \right.$$

Fontes Equivalentes



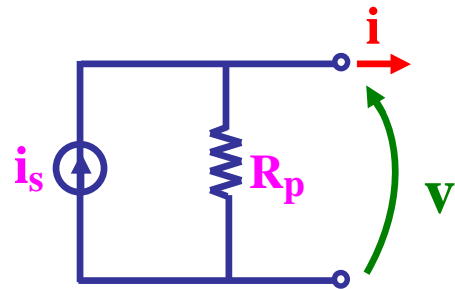
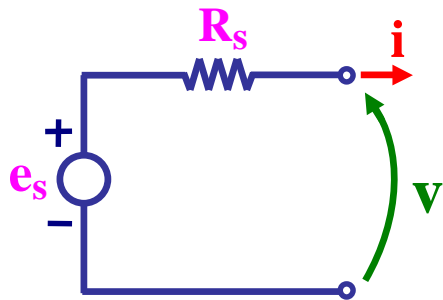
FONTES POTENCIALMENTE DUAIS



FONTES ESTRITAMENTE DUAIS

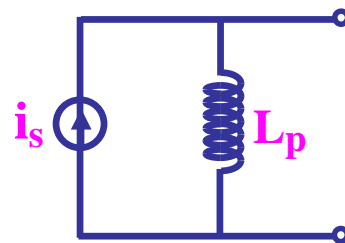
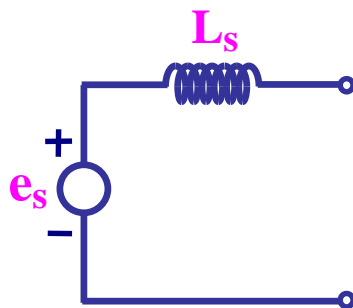
$$\left\{ \begin{array}{l} e_s = i_s \\ R = G \end{array} \right.$$

Fontes Equivalentes



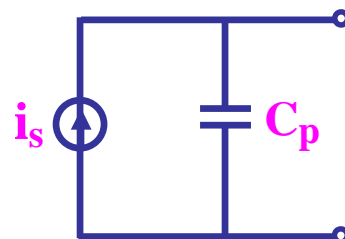
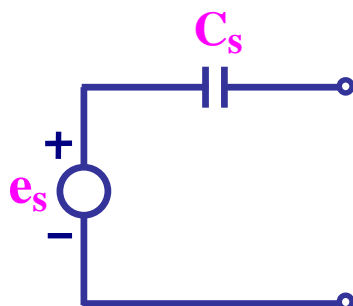
$$R_p = R_s$$

$$e_s = R_p i_s$$



$$L_p = L_s$$

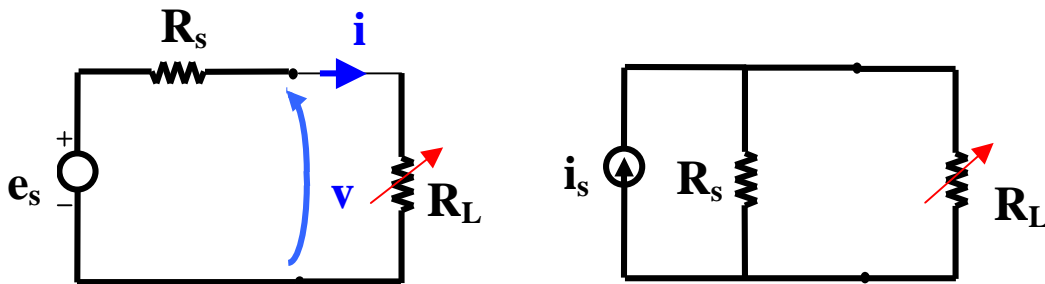
$$e_s(t) = L \frac{d(i_s(t))}{dt}$$



$$C_p = C_s$$

$$i_s(t) = C \frac{d(e_s(t))}{dt}$$

Teorema da Máxima Transferência de Potência



R_s fixo

Potência na carga R_L :

$$p_L = \frac{v^2}{R_L} = \frac{e_s^2 \cdot R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

p_{Lmax} . ocorre para $R_L = R_s \rightarrow$

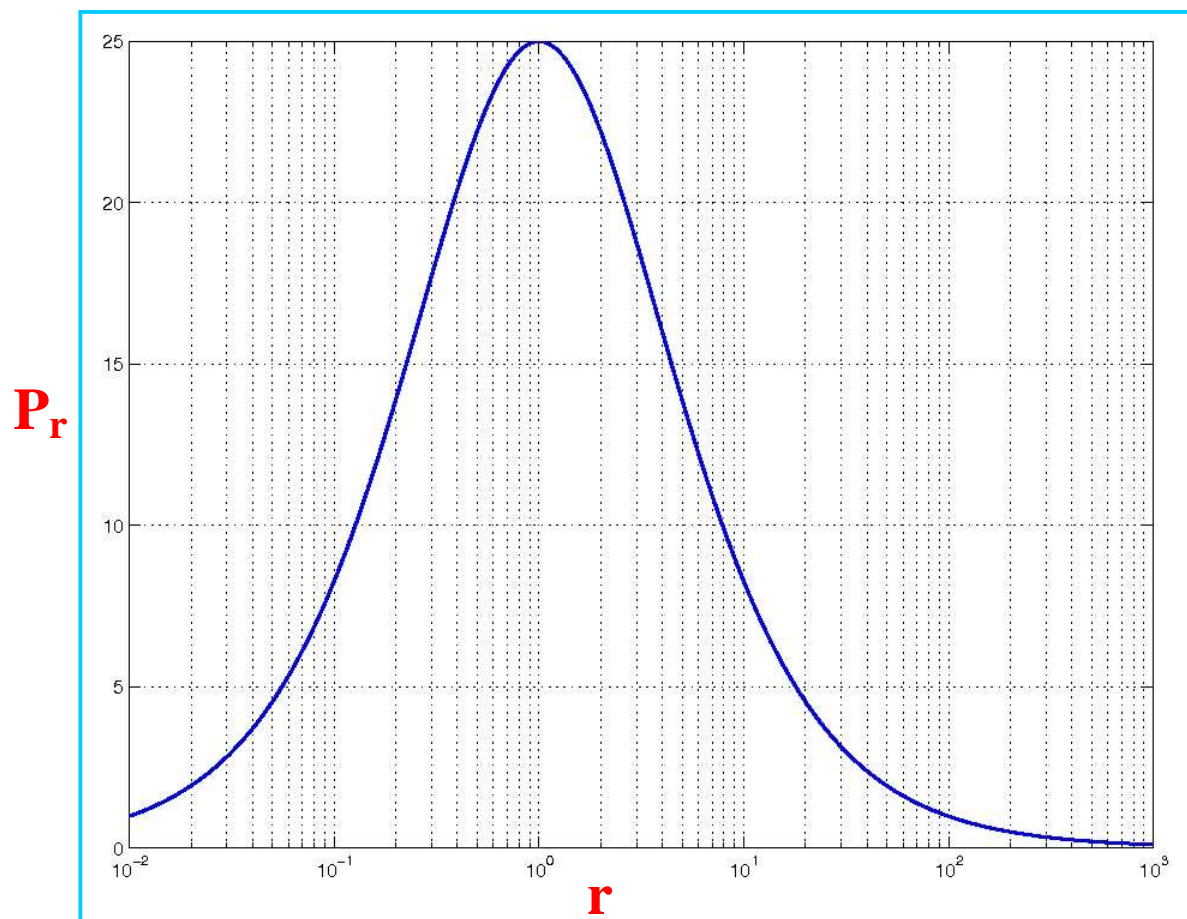
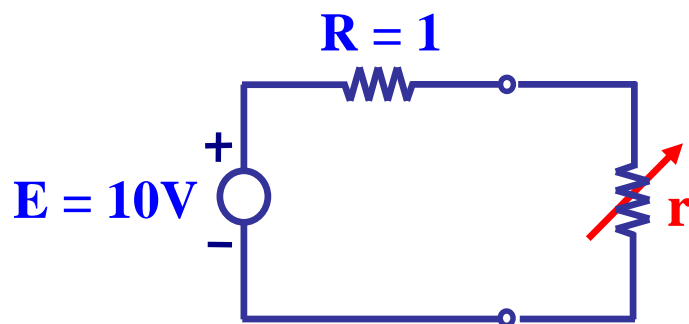
condição de carga casada

$$p_{Lmax} = \frac{e_s^2}{4 \cdot R_s}$$

Rendimento :

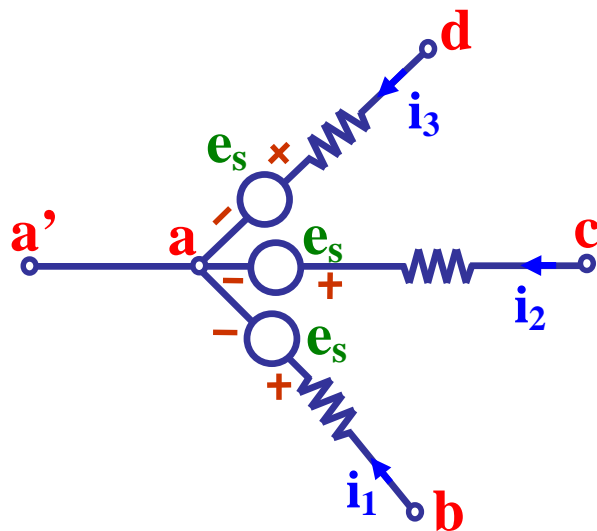
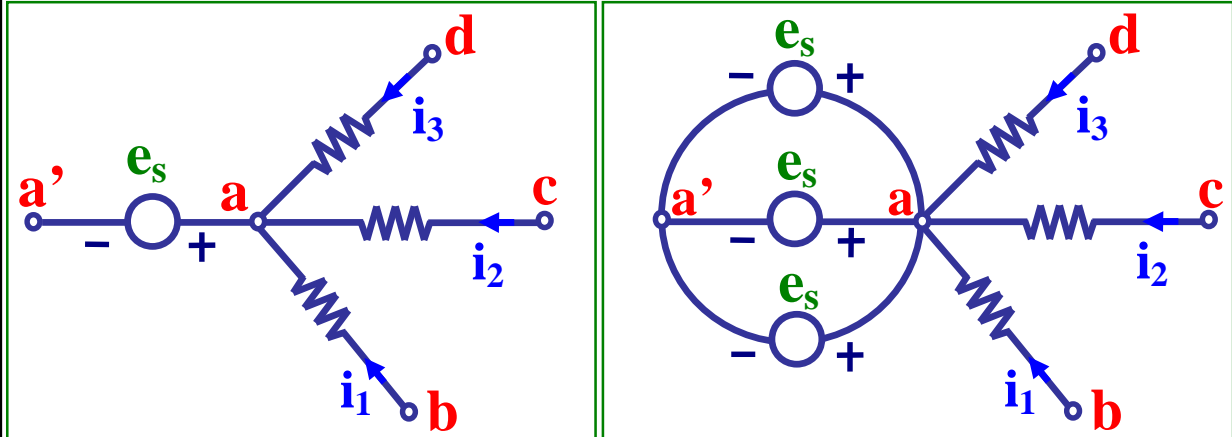
$$\eta = \frac{p_L}{p_{total}} = 50\%$$

Máxima Transferência de Potência

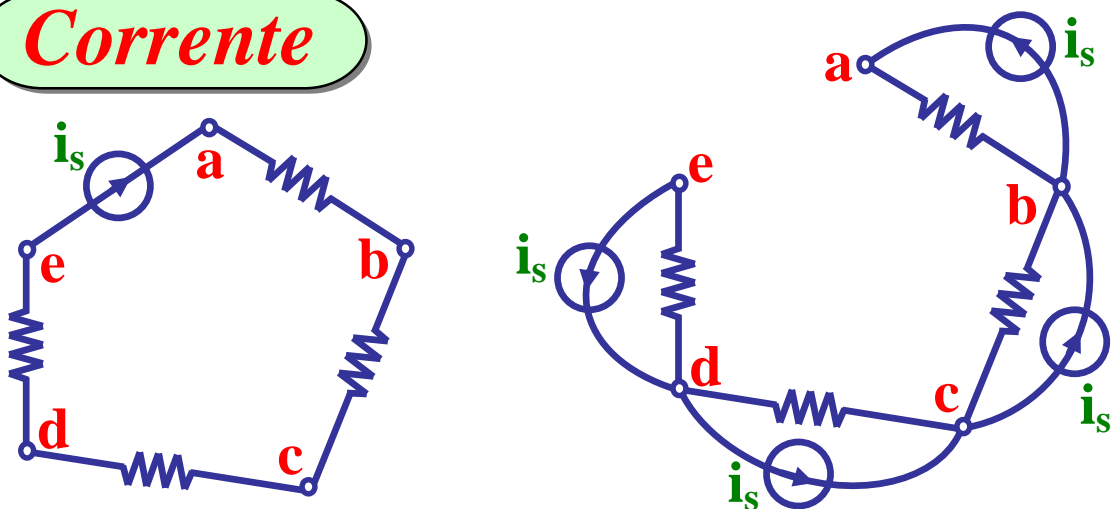


Deslocamento de Fontes Ideais

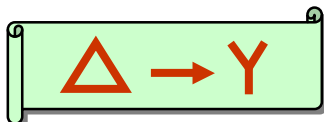
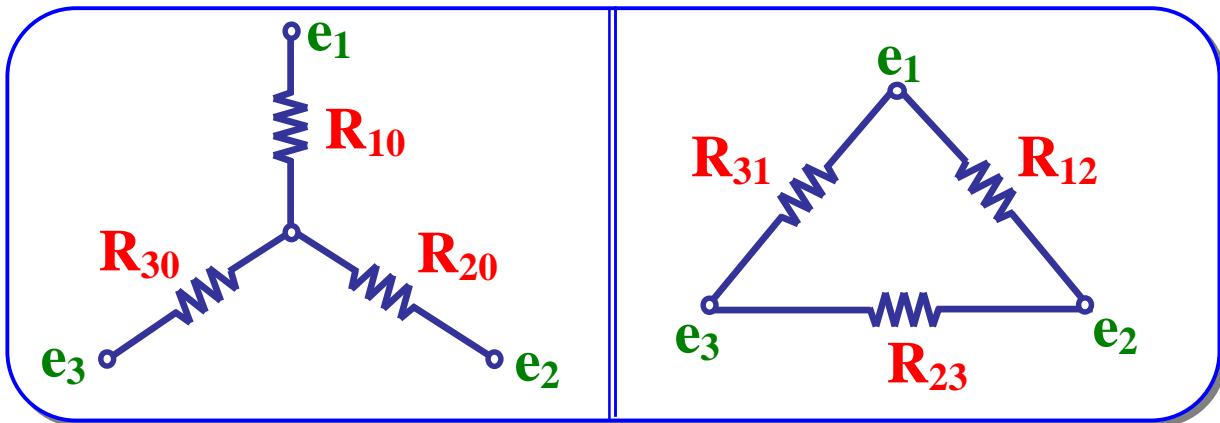
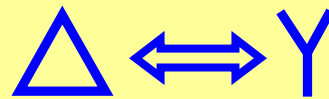
Tensão



Corrente



Transformação

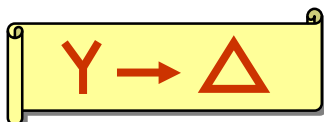


$$R_{10} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{\Delta}}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{\Delta}}$$

$$R_{30} = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{\Delta}}$$

$$R_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$



$$R_{12} = \frac{R_{10} R_{20}}{R_Y}$$

$$R_{23} = \frac{R_{20} R_{30}}{R_Y}$$

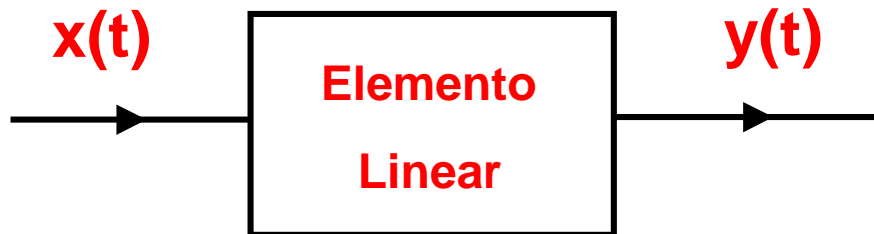
$$R_{31} = \frac{R_{30} R_{10}}{R_Y}$$

$$G_Y = G_{10} + G_{20} + G_{30}$$

$$R_Y = \frac{1}{G_Y}$$

Para $R_{10} = R_{20} = R_{30}$ então $R_{\text{estrela}} = \frac{1}{3} R_{\text{triângulo}}$

LINEARIDADE



- **HOMOGENEIDADE :**

$$K \cdot x(t) \rightarrow K \cdot y(t)$$

- **ADITIVIDADE :**

Se : $\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases}$

Então : $\begin{cases} x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \\ y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$

CONSEQÜÊNCIAS :

Proporcionalidade entre excitação e resposta

Superposição

$$K_1 \cdot x_1(t) + K_2 \cdot x_2(t) \rightarrow K_1 \cdot y_1(t) + K_2 \cdot y_2(t)$$

TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

REDE **LINEAR**

VÁRIAS EXCITAÇÕES

RESPOSTA = \sum respostas devidas a cada gerador independente, com os demais desativados

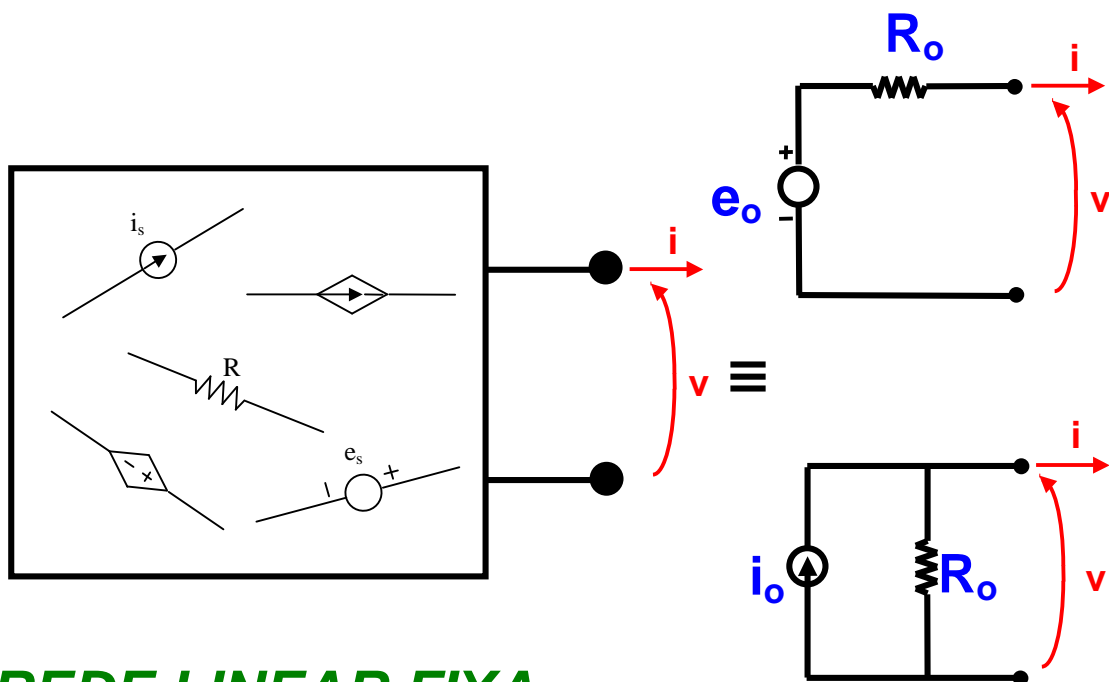
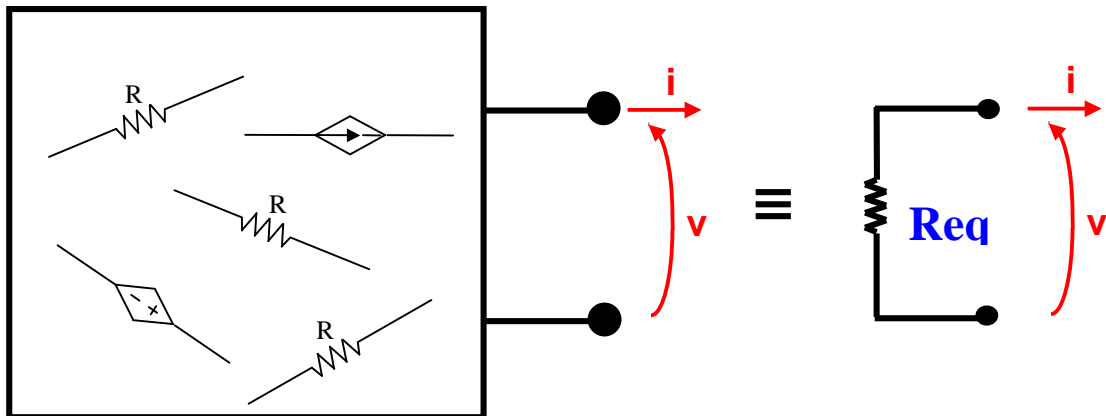
Fonte de Tensão = **curto-circuito**

Fonte de Corrente = **circuito aberto**

ATENÇÃO : Nunca inativar

gerador vinculado

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON



REDE LINEAR FIXA

$$R_o = \frac{e_o}{i_o}$$

$$i_o = \frac{e_o}{R_o}$$

Leon-Charles Thévenin (1857-1927)



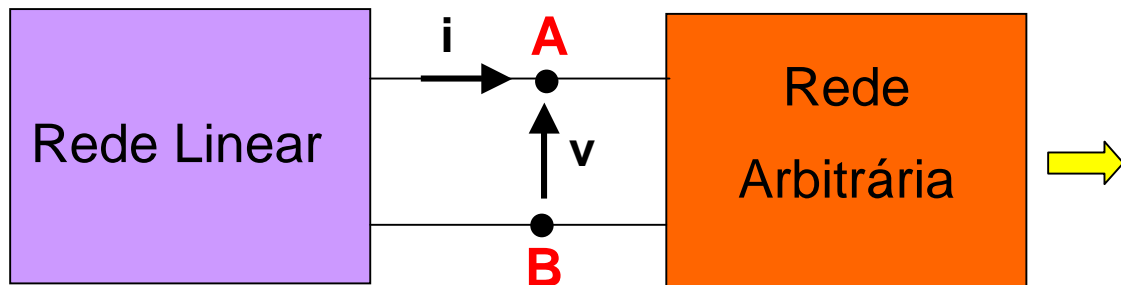
Engenheiro telegráfico, oficial e educador francês (École Polytechnique), famoso por seu teorema publicado em 1883. Trabalhou ativamente no estudo e projeto de sistemas telegráficos (incluindo transmissão subterrânea), capacitores cilíndricos e eletromagnetismo.

Edward L. Norton (1898-1983)

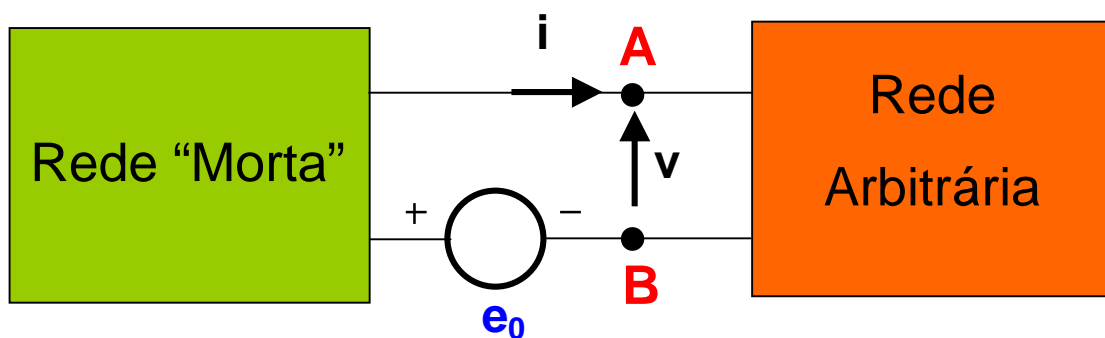


Engenheiro elétrico, cientista e inventor americano, da Bell Laboratories. Propôs em 1926, na AT&T, o dual do teorema de Thévenin, para facilitar o projeto de instrumentos de gravação, operados por corrente. Realizou pesquisas nas áreas de circuitos, sistemas acústicos, telefonia e transmissão de dados. Obteve 19 patentes com seus trabalhos.

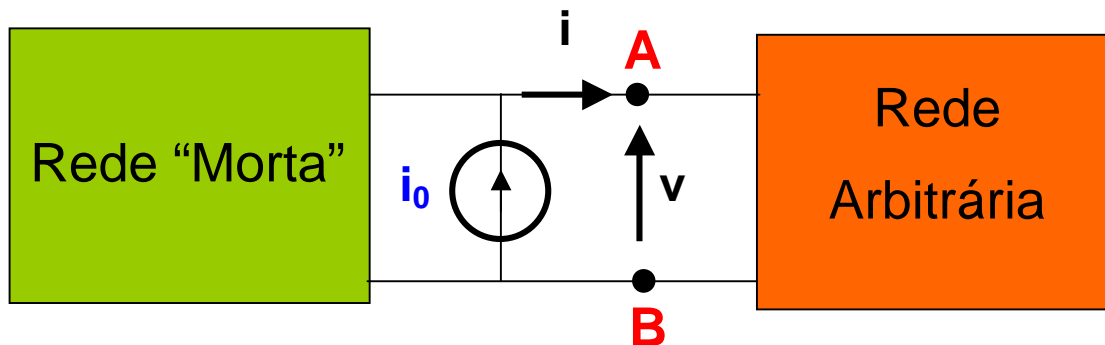
TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON



Thévenin:



Norton:



Rede "Morta" = Rede linear inativada

e_0 = tensão em aberto produzida pela rede linear entre os terminais A e B

i_0 = corrente de curto produzida pela rede linear entre os terminais A e B

Aplicação dos Teoremas de Thévenin e Norton

1- Circuito com Resistores e Geradores independentes:

- ♦ Calcular e_o ou i_o com geradores ativados
- ♦ Calcular R_o com geradores desativados

2- Circuito com Resistores e Geradores vinculados (nenhum gerador independente)

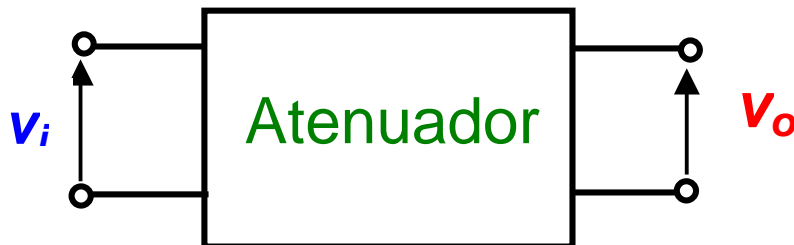
- ♦ $e_o = i_o = 0$
- ♦ Calcular R_o impondo tensão e calculando corrente (ou vice-versa)

3- Circuito com Resistores e Geradores vinculados e Geradores independentes

- ♦ Calcular e_o
- ♦ Calcular i_o
- ♦ Calcular $R_o = e_o / i_o$

ATENUADORES RESISTIVOS

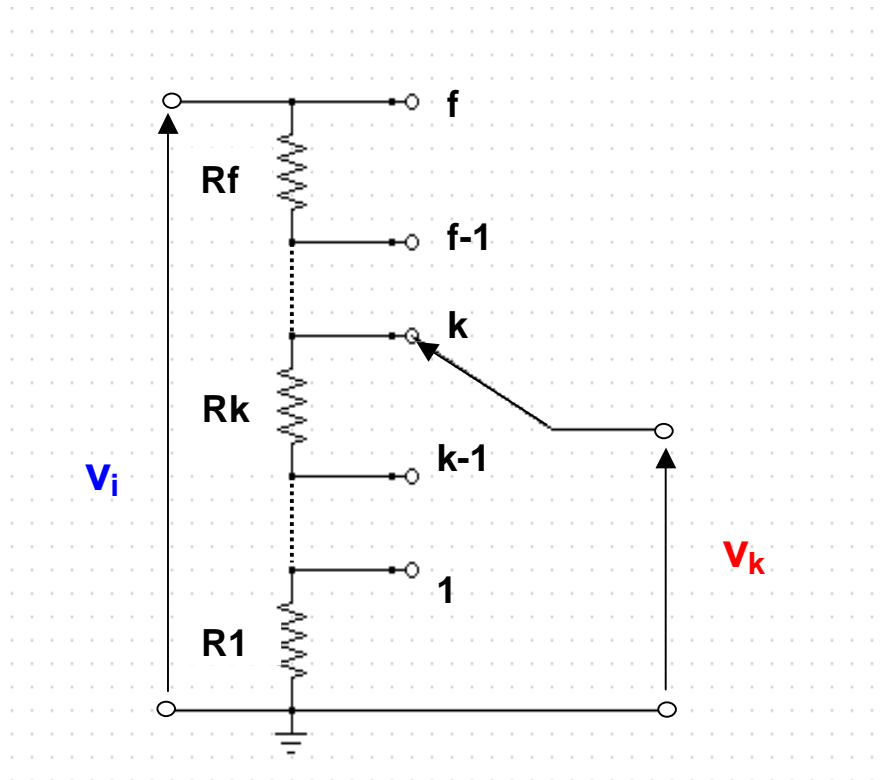
- quadripolos resistivos
- tensão de saída v_o é uma fração conhecida da tensão de entrada v_i



Tipos de atenuadores resistivos

- Lineares
- Logarítmicos
- Resistência característica constante

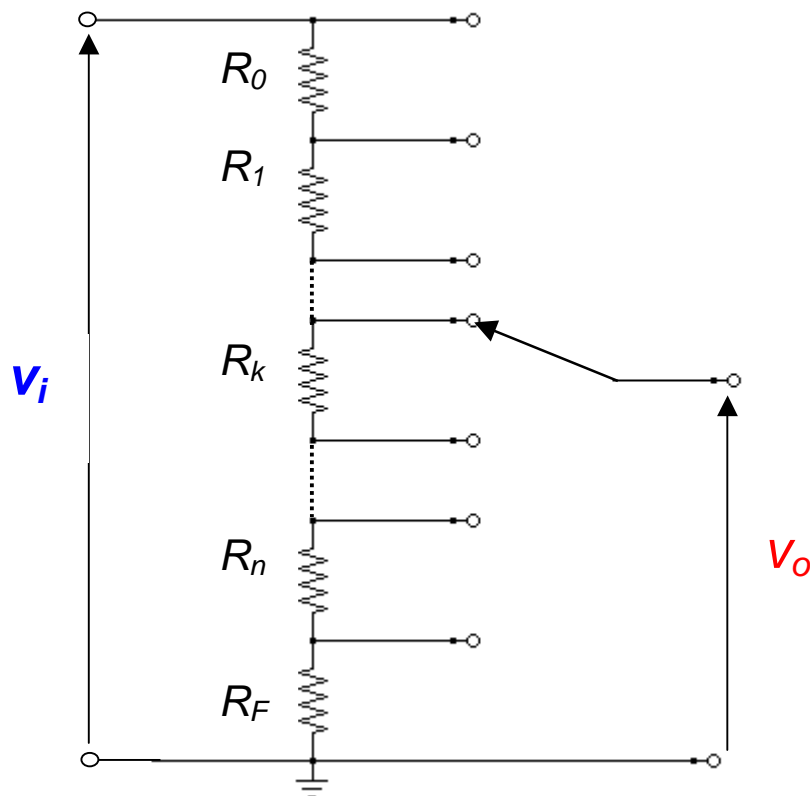
ATENUADOR RESISTIVO LINEAR



Atenuação com a chave na k -ésima posição:

$$A_k = \frac{v_k}{v_i} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{\sum_{i=1}^f R_i}$$

ATENUADOR RESISTIVO LOGARÍTMICO



Atenuação em *decibéis (dB)* com a chave na k -ésima posição:

$$A_k (dB) = 20 \cdot \log \left(\frac{v_o}{v_i} \right)$$

EXEMPLO DE CÁLCULO DE ATENUADOR LOGARÍTMICO

Dados $\left\{ \begin{array}{l} \text{Atenuação/ passo} = -6 \text{ dB} \\ \text{No. passos: } n=3 \\ \text{Resistência total: } R_T = 100 \text{ k}\Omega \end{array} \right.$

- Cálculo de N (atenuação por passo):

$$k=1 \left\{ A_1 = 20 \log N = -6 \rightarrow N = 0,501 \right.$$

- Cálculo de R_0 :

$$R_0 = (1 - N) R_T = 49,9 \text{ k}\Omega$$

- Cálculo das resistências intermediárias:

$$R_{i+1} = N R_i, \quad i = 0, 1 \quad \rightarrow$$

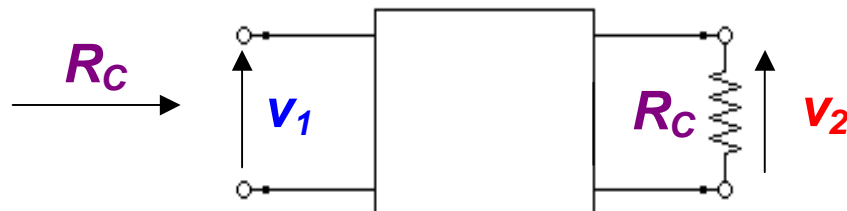
$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 = N R_0 = 25 \text{ k}\Omega \\ R_2 = N R_1 = 12,53 \text{ k}\Omega \end{array} \right.$$

- Cálculo de R_F :

$$R_F = R_T - (R_0 + R_1 + R_2) = 12,57 \text{ k}\Omega$$

ATENUADOR DE RESISTÊNCIA CARACTERÍSTICA CONSTANTE

Quadripolos que, terminados pela
resistência característica R_c ,
apresentam à entrada a mesma
resistência R_c

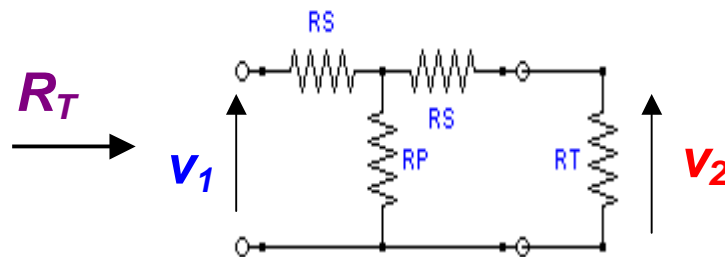


Atenuação $k = V_2 / V_1$

Resistência característica: R_c

EXEMPLO DE CÁLCULO DE ATENUADOR DE RESISTÊNCIA CARACTERÍSTICA CONSTANTE

Atenuador em “T”



- Atenuação: $k = 0,1$
- Resistência característica: $R_T = 50 \Omega$

Cálculo dos resistores:

$$R_S = \frac{1-k}{1+k} \cdot R_T = \frac{1-0,1}{1+0,1} \cdot 50 = 40,91 \Omega$$

$$R_P = \frac{2k}{1-k^2} \cdot R_T = \frac{0,2}{1-0,01} \cdot 50 = 10,10 \Omega$$



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

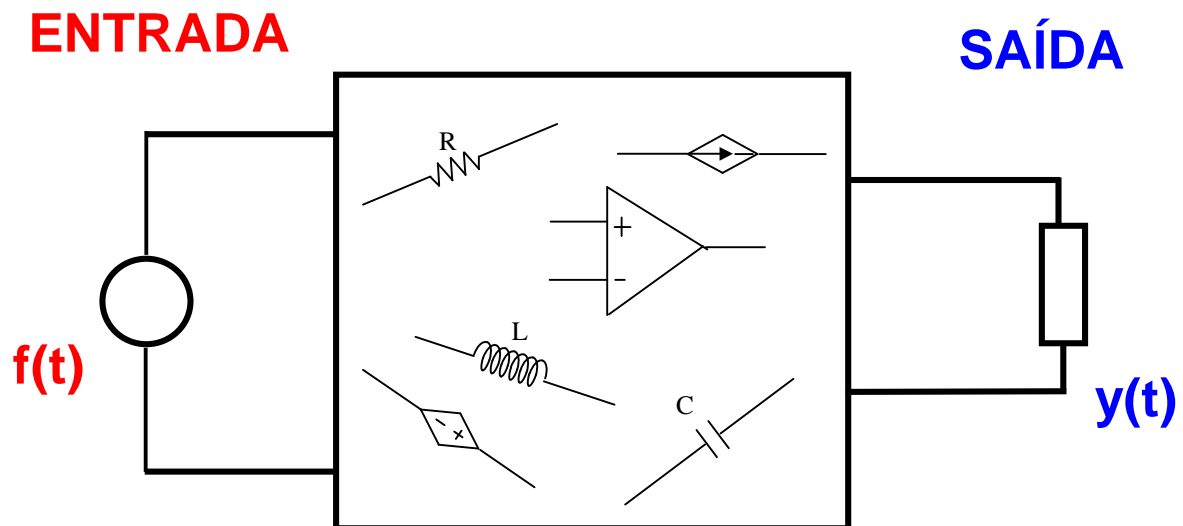
Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 5

Estudo de Redes de Primeira Ordem

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

CIRCUITO LINEAR INVARIANTE NO TEMPO



Modelo Matemático

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = f(t)$$

Equação **D**iferencial **O**rdinária **L**inear e a
Coeficientes **C**onstantes

f(t) = função dada

Equações Diferenciais

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- **Ordinárias :**

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

ordem n

- **Lineares :**

$$C_0(x) y^n(x) + C_1(x) y^{n-1}(x) + \dots + C_n(x) y(x) = f(x)$$

- **Coeficientes Constantes :**

$$C_0(x) = C_0$$

$$C_1(x) = C_1 \quad \dots \quad C_n(x) = C_n$$

constantes

- **1ª Ordem :**

$$A_0 y' + A_1 y = f(x)$$

$$A_0 \frac{dy}{dx} + A_1 y = f(x)$$

Solução : $y(x)$

Equações Diferenciais - Exemplos

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 = \frac{dy}{dx}$$

ordinária – ordem 2
não-linear – 4º grau
coeficientes constantes

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)^4 + x t \sin(y t)$$

derivada parcial
ordem 3

$$2x \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1}{y}$$

ordinária
não-linear
coeficientes variáveis

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^3 = \tan x$$

ordinária
não-linear
coef. variáveis

$$\frac{dy}{dx} + a y = \sin x$$

ordinária – ordem 1
linear
coeficientes constantes

$a \in \mathbf{R}$

Equação Diferencial

$$A_0 \frac{dx}{dt} + A_1 x(t) = f(t)$$

A_0 , A_1 – coeficientes dependentes dos parâmetros do circuito

t – variável independente → tempo

$x(t)$ – resposta do circuito
(tensão ou corrente)

$f(t)$ – depende da excitação do circuito

Forma Padronizada :

$$\dot{x}(t) + a x(t) = f(t)$$

E. D. O. L. C. C. Completa :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = f(t)$$

E. D. O. L. C. C. Homogênea:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$$

Solução da Equação Completa =

Solução Geral da Equação Homogênea

+

**Solução Particular da Equação
Completa**

O problema de valor inicial (P. V. I.)

(1ª Ordem)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0 = \text{condição inicial} \end{cases}$$

Solução do P.V.I. :

$\mathbf{x}(\mathbf{t})$ tal que :

1 – Satisfaz à equação diferencial

2 – Passa pelo ponto (\mathbf{x}_0 , \mathbf{t}_0)

Etapas na Solução do P.V.I.

(1ª Ordem)

1 – Determinar raízes da equação característica

$$s + a = 0 \rightarrow s_1 = -a$$

2 – Determinar solução geral da equação homogênea

Sistema Livre $f(\cdot) = 0$

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{A} e^{s_1 t}$$

A = constante de integração

Etapas na Solução do P.V.I.

(1ª Ordem) **Cont.**

3 – Achar solução particular $\phi(t)$ da equação completa

4 – Solução da equação completa :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \phi(t) = \mathbf{A} e^{-at} + \phi(t)$$

5 – Determinar a constante de integração

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A} e^{-at_0} + \phi(t_0)$$



$$\mathbf{A} = e^{at_0} \left(\mathbf{x}_0 - \phi(t_0) \right)$$

Solução da Equação Completa = Resposta completa do circuito

$$\mathbf{x}(t) =$$

$$\underbrace{\left[\mathbf{x}_0 - \phi(t_0) \right] e^{-a(t-t_0)}}_{\text{Resposta Transitória}} + \underbrace{\phi(t)}_{\text{Resposta Permanente}}$$

$$\mathbf{x}(t) =$$

$$\underbrace{\mathbf{x}_0 e^{-a(t-t_0)}}_{\text{Resposta Livre}} + \underbrace{\left[-\phi(t_0) e^{-a(t-t_0)} + \phi(t) \right]}_{\text{Resposta Forçada}}$$

(Entrada Zero) (Estado Zero)

Solução Completa

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \underbrace{\left[\mathbf{x}_0 - \phi(\mathbf{t}_0) \right] \mathbf{e}^{-\mathbf{a}(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)}}_{\text{Transitória}} + \underbrace{\phi(\mathbf{t})}_{\text{Permanente}}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) =$$

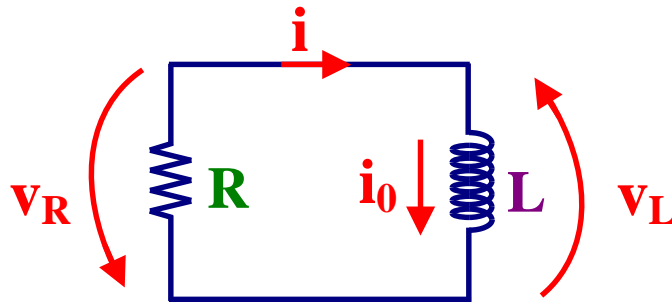
$$\underbrace{\mathbf{x}_0 \mathbf{e}^{-\mathbf{a}(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)}}_{\text{Livre}} + \underbrace{\left[-\phi(\mathbf{t}_0) \mathbf{e}^{-\mathbf{a}(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)} + \phi(\mathbf{t}) \right]}_{\text{Forçada}}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) =$$

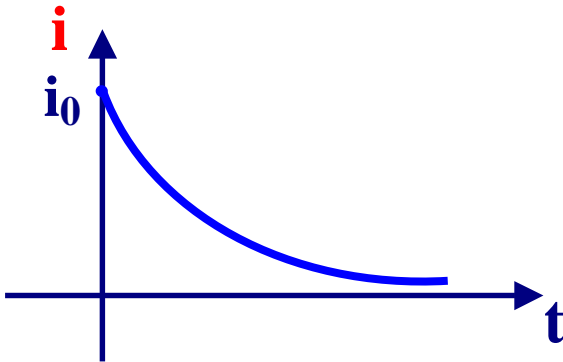
$$\underbrace{\mathbf{x}_0 \mathbf{e}^{-\mathbf{a}(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)}}_{\text{Livre}} + \underbrace{\int_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-\mathbf{a}(\mathbf{t}-\lambda)} \mathbf{f}(\lambda) \mathrm{d}\lambda}_{\text{Forçada}}$$

Circuito RL

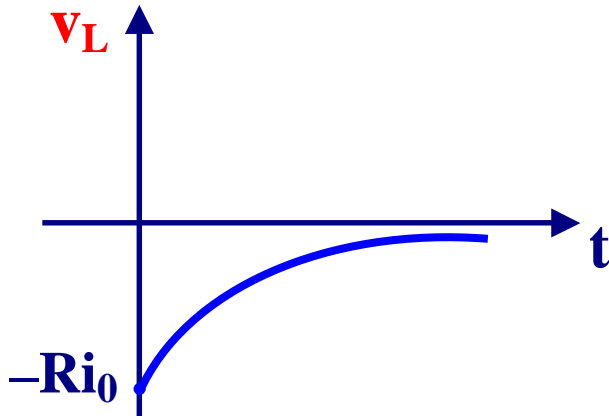
Comportamento Livre



$$\tau = L / R$$

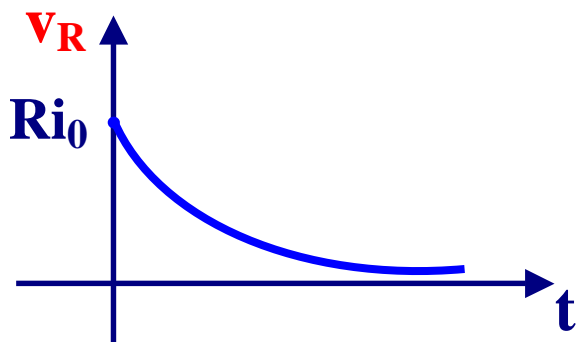


$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$$



$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$V_L(t) = -Ri_0 e^{-t/\tau}$$



$$V_R = R i$$

$$V_R(t) = R i_0 e^{-t/\tau}$$

Circuito RL - Aspectos Físicos

- **Respostas Livres :**
 - Exponenciais decrescentes a partir de valor inicial.
 - Constante de tempo : L / R

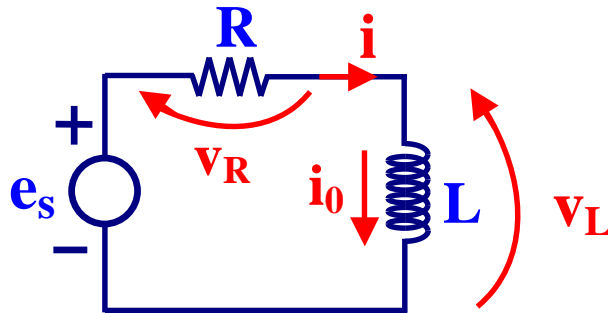
- **Energia inicialmente armazenada no indutor → Dissipada no resistor**

- **Indutor opõe-se à variação brusca de corrente → provoca atraso no tempo para que se estabeleça o equilíbrio.**

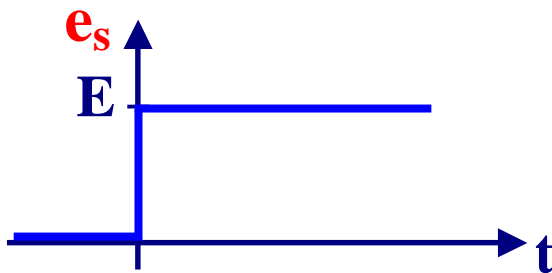
- **Aumentar atraso → Aumentar τ
→ Aumentar L → Diminuir R**

Circuito RL

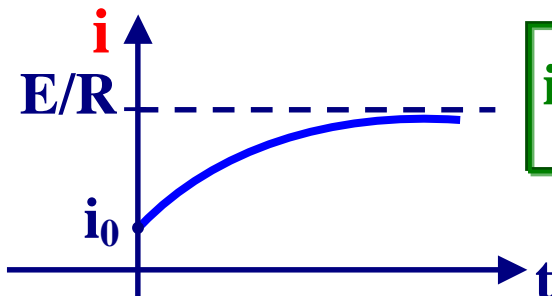
Resposta ao Degrau



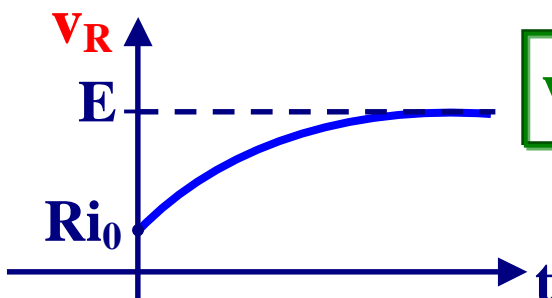
$$\tau = L / R$$



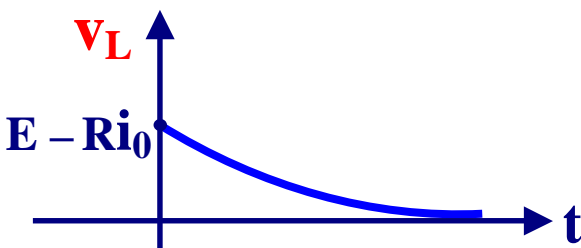
$$e_s(t) = E \cdot H(t)$$



$$i(t) = (i_0 - E/R) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$



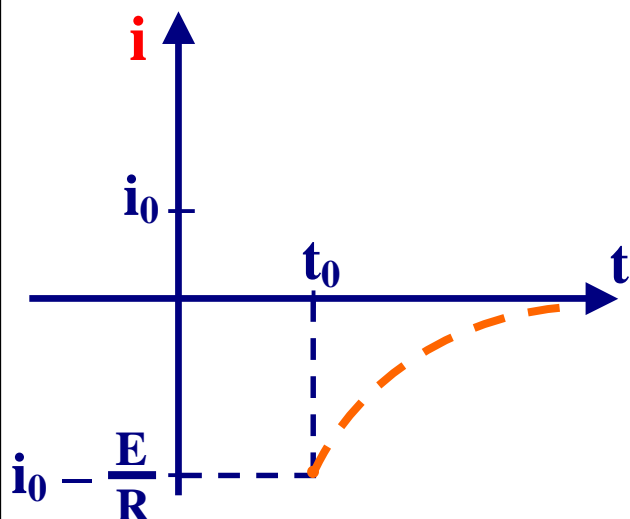
$$v_R(t) = (Ri_0 - E) e^{-t/\tau} + E$$



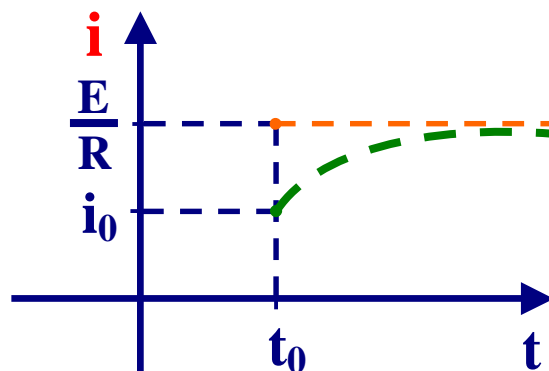
$$v_L(t) = (E - Ri_0) e^{-t/\tau}$$

Circuito RL

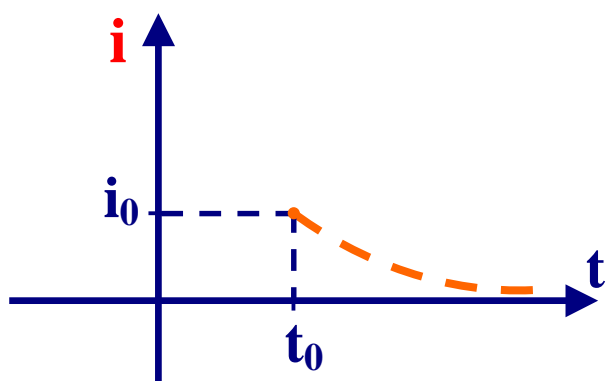
$$i(t) = \underbrace{(i_0 - E/R)}_{\downarrow} e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}} + \underbrace{E/R}_{\downarrow}$$



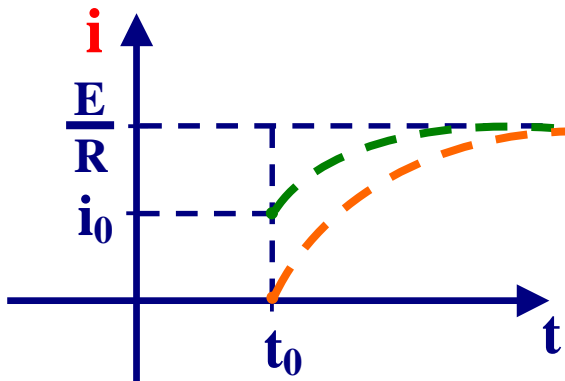
transitório



permanente



entrada zero
(livre)



estado zero
(forçada)

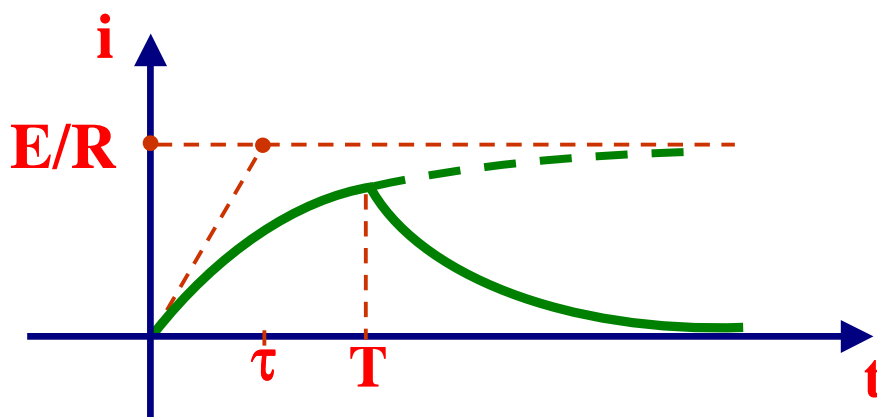
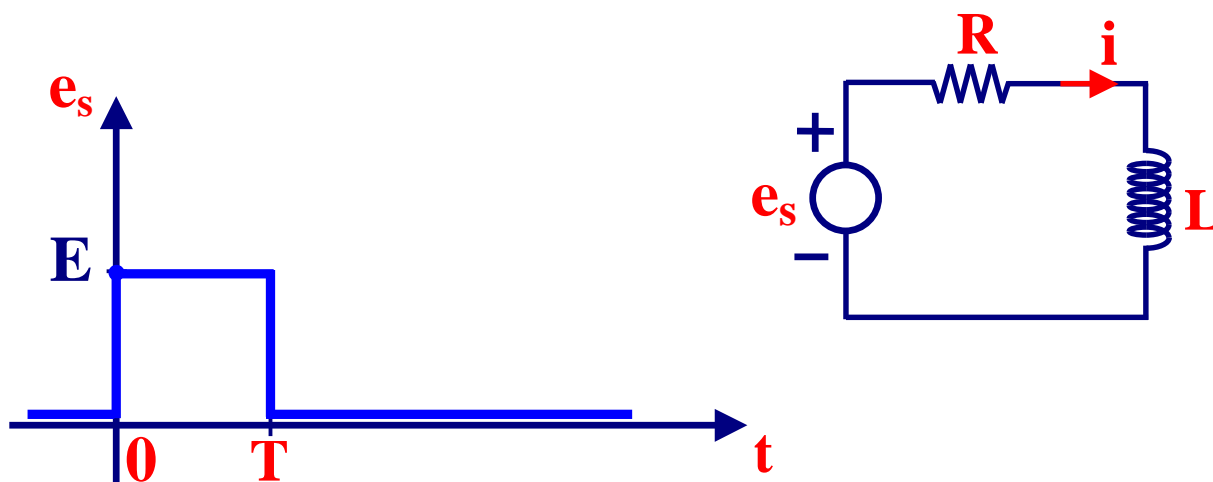
$$i(t) = i_0 e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}}$$

+

$$\frac{E}{R} \left(1 - e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}} \right)$$

Circuito RL

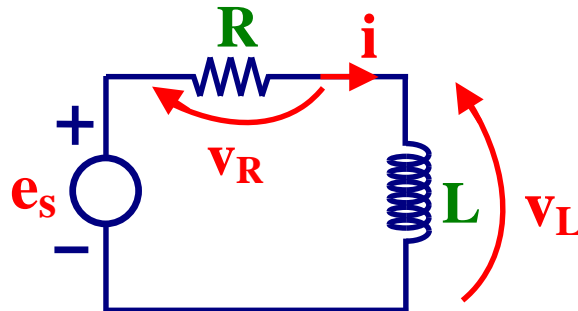
Resposta ao Pulso



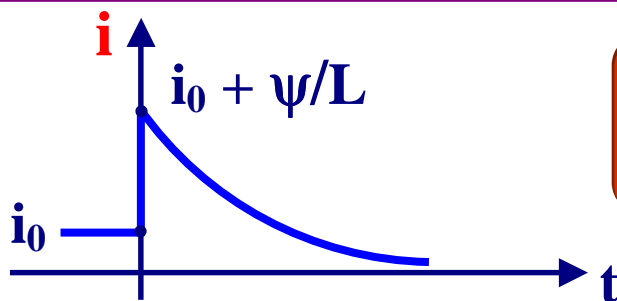
$$\begin{cases} i(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \frac{E}{R} & (0 \leq t \leq T) \\ i(t) = \left(1 - e^{-T/\tau}\right) \frac{E}{R} e^{-(t-T)/\tau} & (t > T) \end{cases}$$

Circuito RL

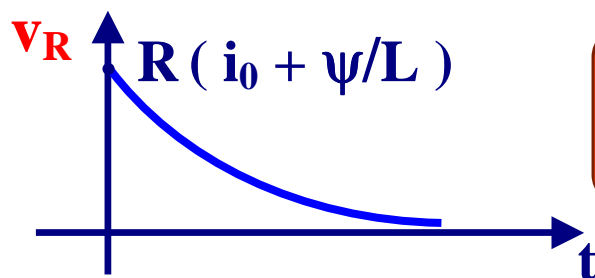
Resposta ao Impulso



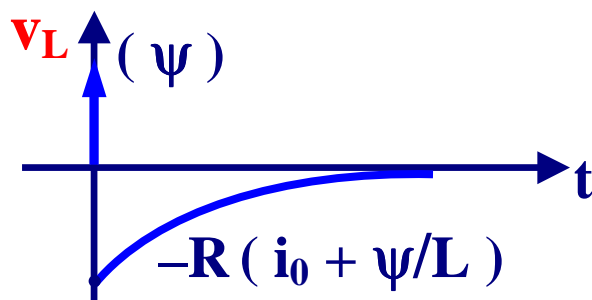
$$e_s(t) = \psi \delta(t)$$



$$i(t) = \left(i_0 + \frac{\psi}{L} \right) e^{-t/\tau}$$



$$v_R(t) = R \left(i_0 + \frac{\psi}{L} \right) e^{-t/\tau}$$



$$v_L(t) = \psi \delta(t) - R \left(i_0 + \frac{\psi}{L} \right) e^{-t/\tau}$$

Circuito RL - Aspectos Físicos

- Indutor em $t = t_0$ opõe-se à variação de corrente

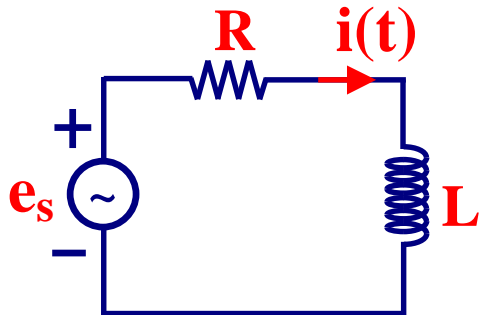
$$i = i_0$$

- Para excitação contínua (C.C.) em $t \rightarrow \infty$ indutor vira curto-circuito

$$v_L \rightarrow 0$$

- Impulso de tensão \rightarrow provoca fluxo magnético instantâneo $\psi \rightarrow$ produz descontinuidade de corrente no indutor : ψ/L

Circuito RL - Excitação Senoidal



$$e_s(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\hat{E}_m = E_m e^{j\theta}$$

• Resposta Permanente

$$\hat{I}_m = \frac{1}{R + j\omega L} \hat{E}_m$$

Impedância : $Z(j\omega) = R + j\omega L$

• Resposta Completa

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + \underbrace{i_p(t)}$$

$$|\hat{I}_m| \cos(\omega t + \psi)$$

• Impor $i(t_0) = i_0$
→ Determinar A

Propriedades de números complexos:



– Derivada da parte real de um complexo = parte real da derivada

– Parte real da soma de complexos = soma das partes reais

Circuito RL - Excitação Senoidal

$$e_s(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) =$$

$$\underbrace{\left(i_0 - |\hat{I}_m| \cos \psi \right) e^{\frac{-R}{L} t}}_{\text{Transitória}} + \underbrace{|\hat{I}_m| \cos(\omega t + \psi)}_{\text{Permanente}}$$

$$i(t) =$$

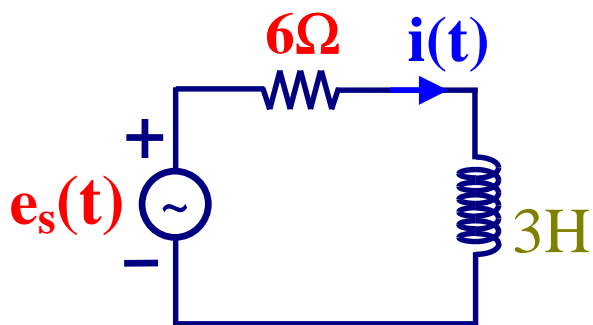
$$\underbrace{i_0 e^{\frac{-R}{L} t}}_{\text{Livre}} - \underbrace{|\hat{I}_m| \cos \psi e^{\frac{-R}{L} t}}_{\text{Forçada}} + |\hat{I}_m| \cos(\omega t + \psi)$$

Para não haver transitório :

$$i_0 = |\hat{I}_m| \cos \psi$$

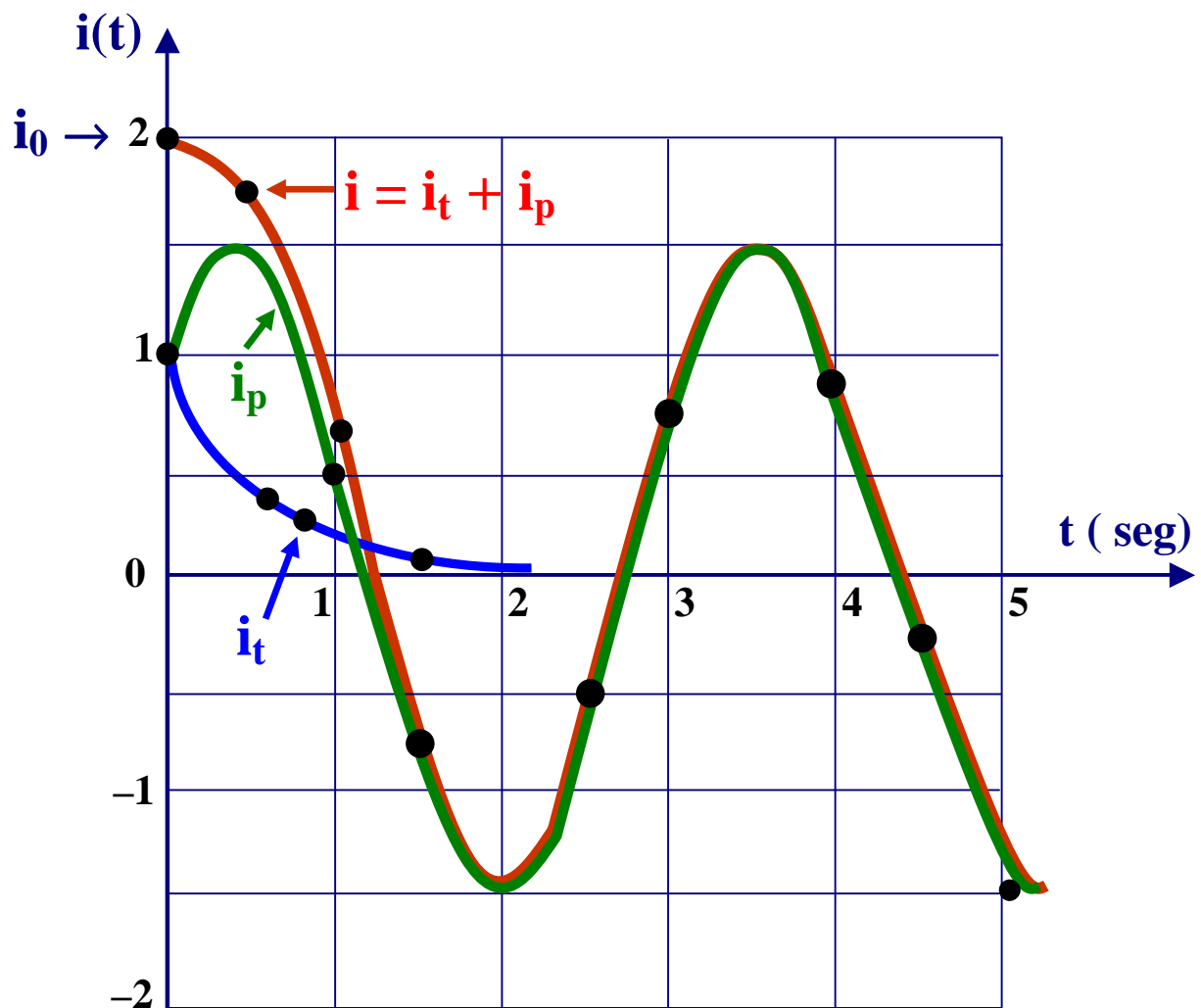
Forçada = Permanente se : $\psi = 90^\circ$

EXEMPLO



$$e_s(t) = 12 \cos 2t$$

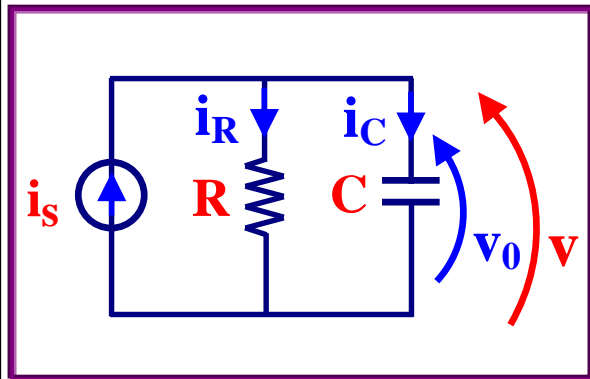
$$i(0) = 2A$$



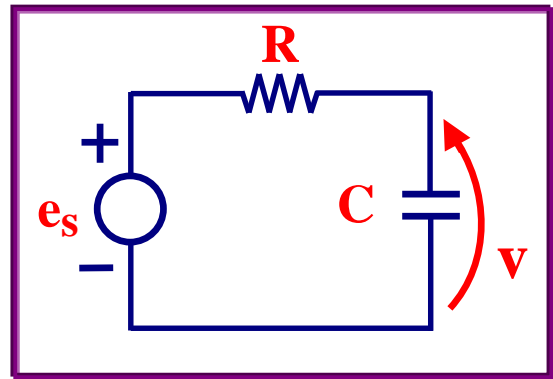
$$i_0 = 2A$$

$$i_0 - |\hat{I}_m| \cos \psi = 1A$$

Circuito RC



ou



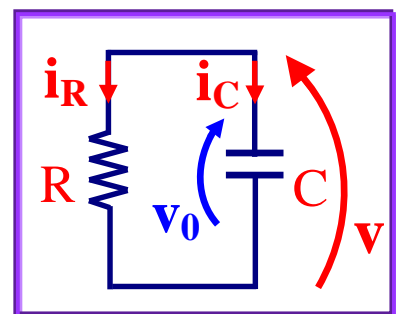
$$e_s = i_s R$$

RC paralelo → Dual do RL série

Equação : 1ª Lei de Kirchhoff →

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i_s$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{i_s}{C}$$

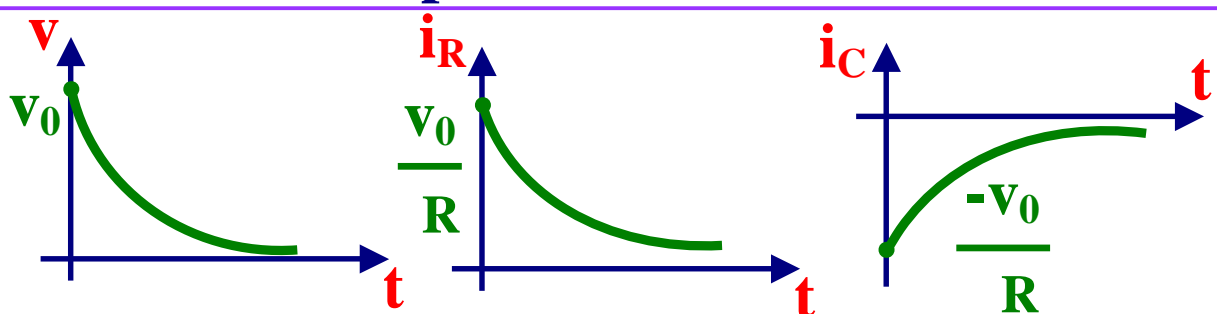


Comportamento Livre

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

**energia armazenada no capacitor →
dissipada no resistor**



Circuito RC

Comportamento Forçado Resposta ao Degrau

$$i_s(t) = I \cdot H(t - t_0)$$

$$v(t_0) = v_0$$

$$t_0 = 0$$

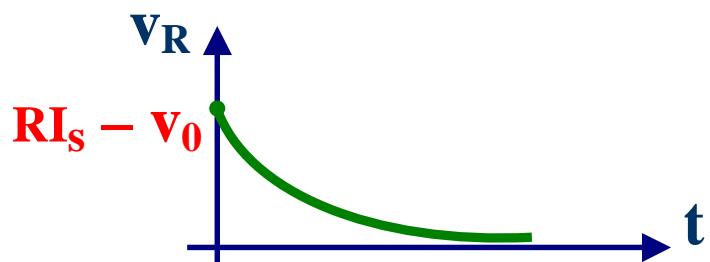
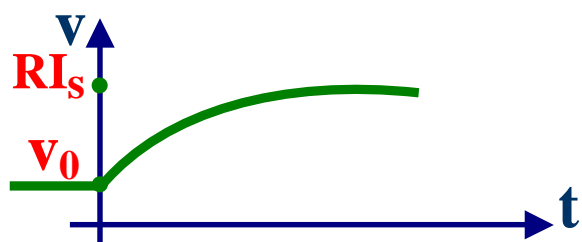
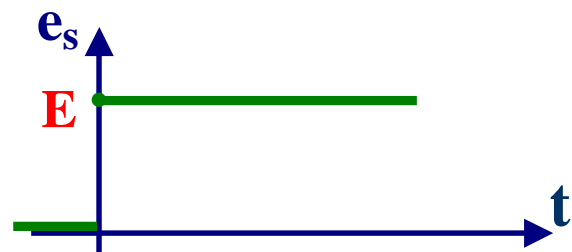
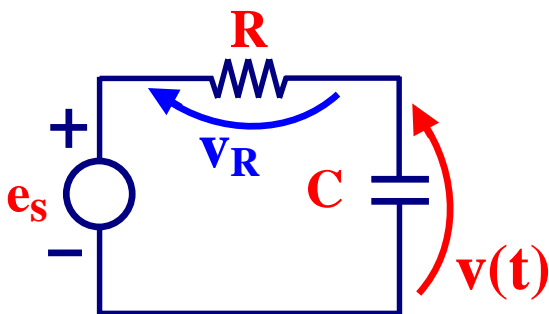
$$v(t) = RI + Ae^{-t/\tau}$$

$$A = v_0 - RI$$

$$v(t) = RI + (v_0 - RI)e^{-t/\tau}$$

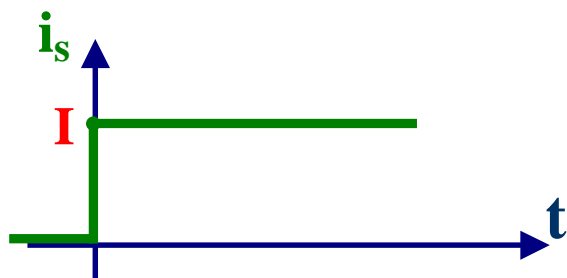
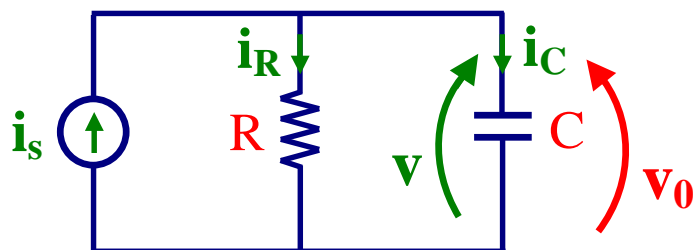
Para o circuito série : $E = RI$

$$v(t) = E + (v_0 - E)e^{-t/\tau}$$

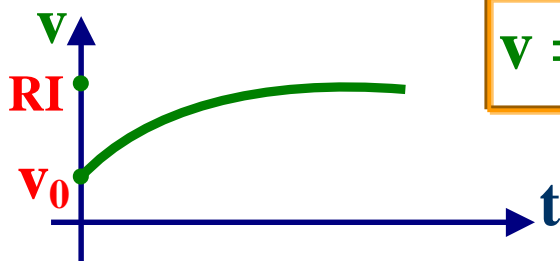


Circuito RC

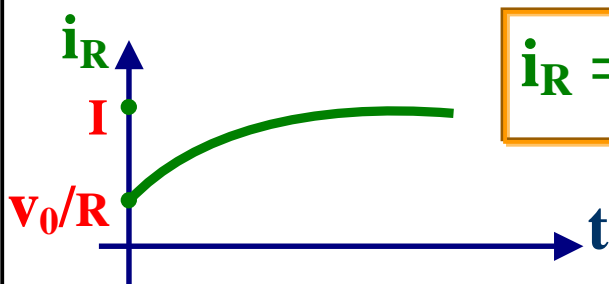
Resposta ao Degrau



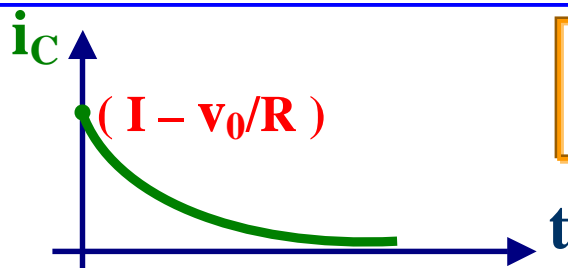
$$i_s = I H(t)$$



$$v = (v_0 - RI) e^{-t/\tau} + RI$$



$$i_R = \left(\frac{v_0}{R} - I \right) e^{-t/\tau} + I$$



$$i_C = \left(I - \frac{v_0}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

Circuito RC

Resposta ao Impulso

$$i_s(t) = Q \delta(t) \quad (A, s)$$

$$v(0_+) = v(0_-) + \frac{Q}{C}$$

$$v(t) = (v(0_-) + Q/C) e^{-t/\tau}$$

Excitação Senoidal

$$i_s(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{RPS: } \hat{I}_m = I_m e^{j\theta}$$

$$\hat{V}_m = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \hat{I}_m$$

**Admitância
complexa :**



$$Y(j\omega) = \frac{\hat{I}_m}{\hat{V}_m} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

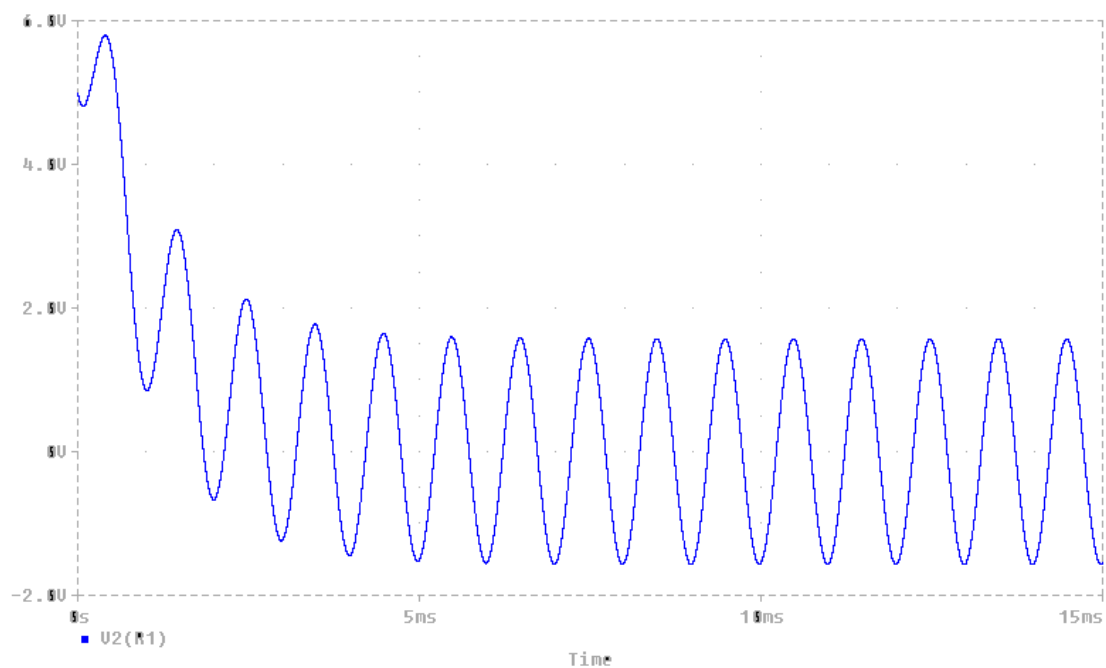
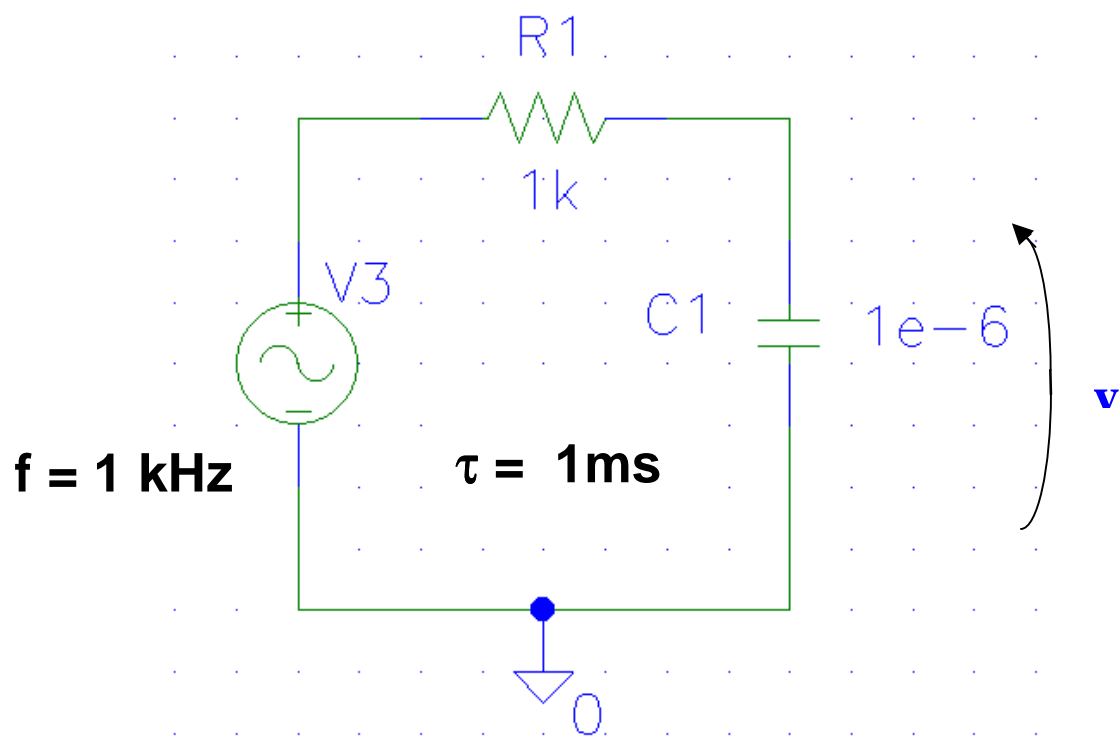
Resposta completa :

$$v(t) = A e^{-t/\tau} + \underbrace{v_p(t)}_{|\hat{V}_m| \cos(\omega t + \psi)}$$

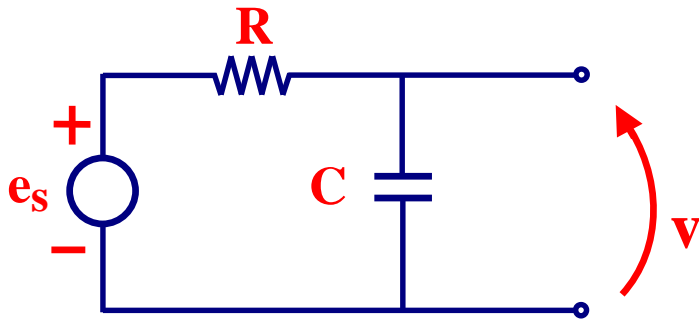
$$\text{impor } v(t_0) = v_0$$

Circuito RC

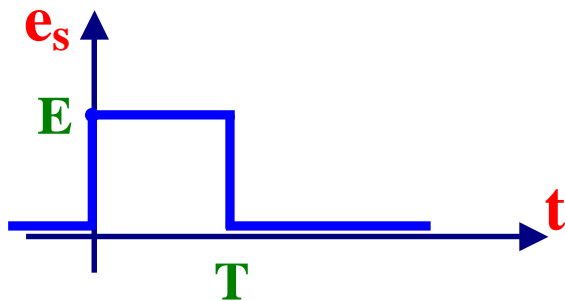
Resposta Completa com Excitação Senoidal



Circuito Integrador (Filtro Passa-baixas)

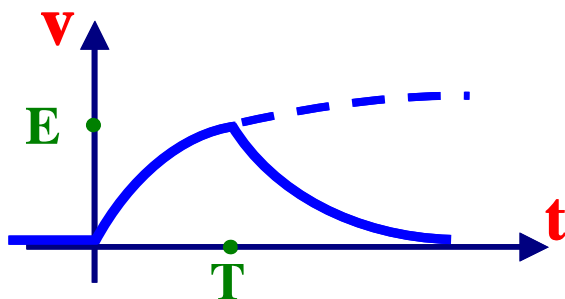


$$\tau = RC$$



Bom integrador

$$\tau \gg T$$

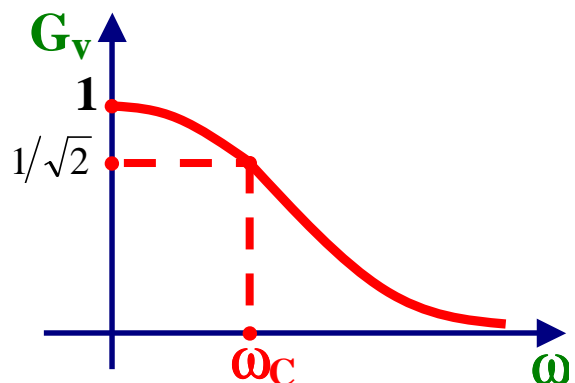


Resposta Permanente Senoidal :

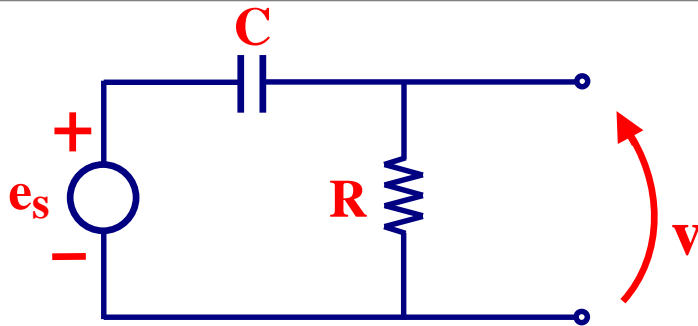
$$G_v = \left| \frac{\hat{V}}{\hat{E}_s} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Frequência de corte superior:

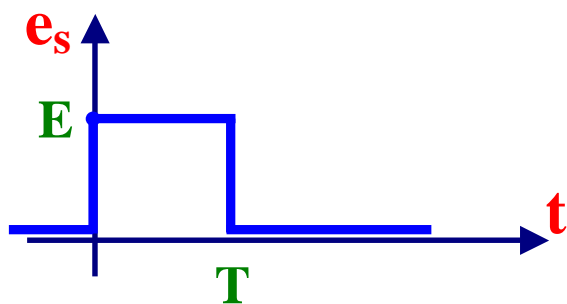
$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$



Circuito Diferenciador (Filtro Passa-Altas)

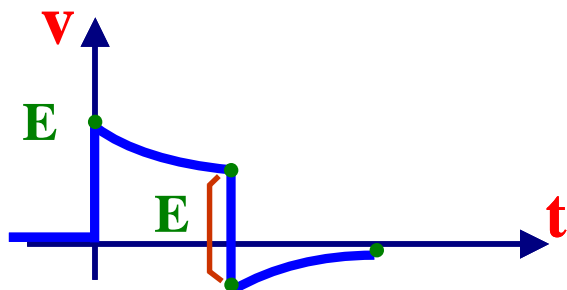


$$\tau = RC$$



Bom diferenciador :

$$\tau \ll T$$

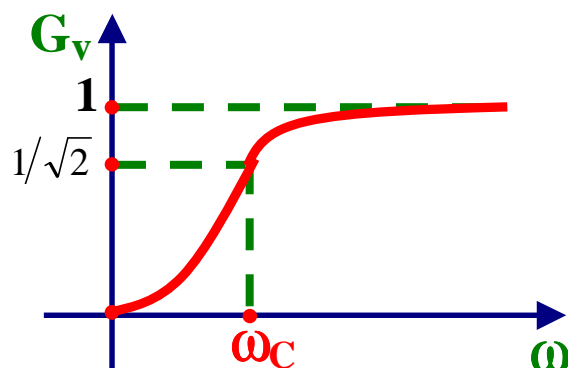


Resposta Permanente Senoidal :

$$G_v = \left| \frac{\hat{V}}{\hat{E}_s} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

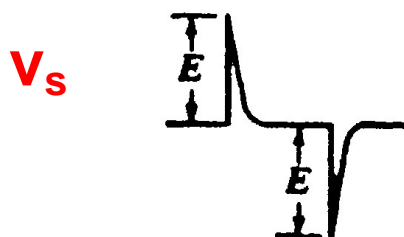
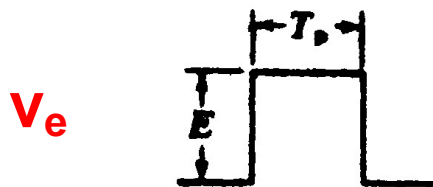
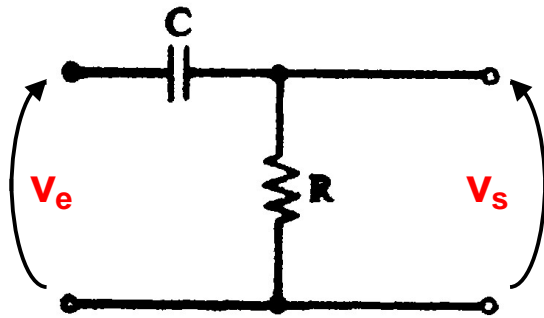
Frequência de corte inferior:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

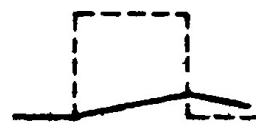
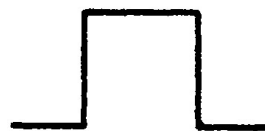
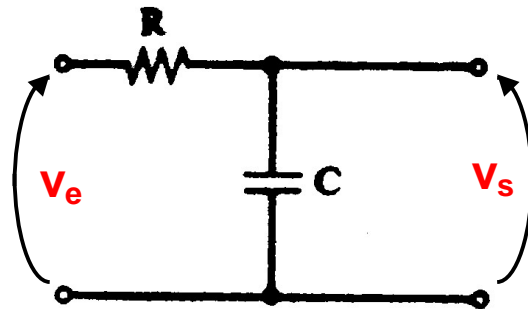


Circuito RC série

Diferenciador



Integrador



$\tau \gg \gg T_p$



$\tau \approx T_p$



$\tau \ll \ll T_p$

Resposta Completa em Redes de 1a. Ordem

I – Constante de Tempo :

- Inativar geradores independentes
- Determinar resistência “vista” pelo elemento armazenador de energia
- Calcular cte de tempo : **L/R** ou **RC**

II – Resposta Transitória

- Comportamento Livre, Modo Natural

$$A e^{-t/\tau}$$

III – Resposta Permanente

- Depende da função de excitação

IV – Transitória + Permanente

- Impor condição inicial → Determinar A
- Condições iniciais :

$$t = t_0 \begin{cases} C & \text{curto} \\ L & \text{aberto} \end{cases}$$

$$t = \infty \begin{cases} C & \text{aberto} \\ L & \text{curto} \end{cases}$$



(para excitação contínua)

Casos Especiais

I – Função excitação definida por segmentos → **Descontinuidades**

- Aplicar “receita” para cada segmento
- Ajustar constantes admitindo as condições finais de um segmento como condição inicial para o próximo :
(v em C ou i em L)

II – Circuito modificado por operação de chaves
Idem

OBS.: Chaveamento de indutores ou capacitores → tensões ou correntes impulsivas → Estudo por Laplace

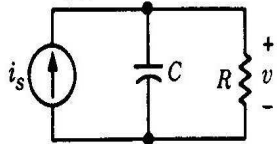
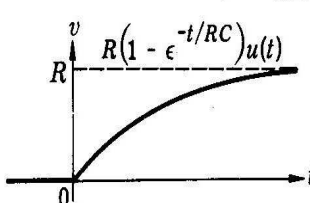
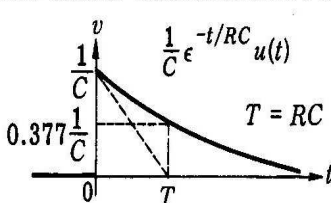
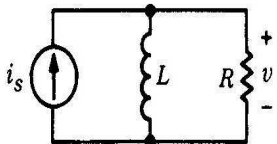
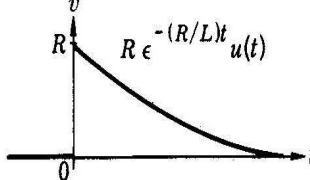
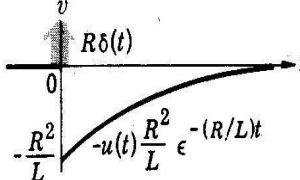
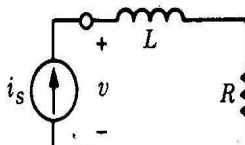
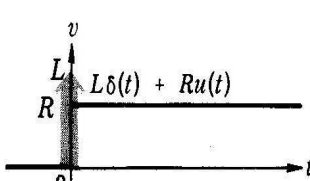
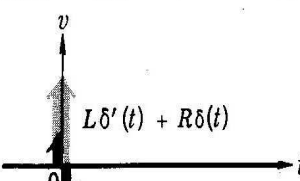
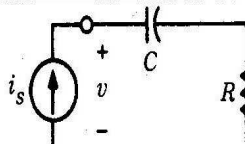
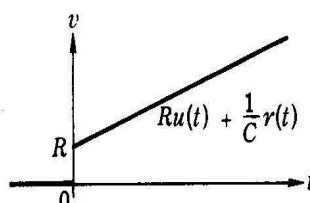
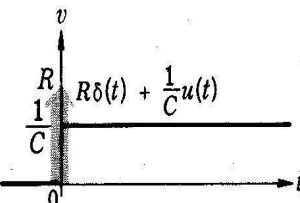
III – Excitações Impulsivas →
Descontinuidades de
 < tensão em capacitores
 < correntes em indutores

Excitação : $i_s(t)$

Resposta : $v(t)$

Degrau

Impulso

$i_s(\text{excitação})$	$v(\text{resposta})$	$\Delta(t)$	$h(t)$
 $C \frac{d}{dt} v + \frac{1}{R} v = i_s$	 $v = R(1 - e^{-t/RC})u(t)$	 $h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/RC} u(t)$ $T = RC$	
 $\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \phi + \frac{1}{L} \phi = i_s$	 $v = R e^{-(R/L)t} u(t)$	 $h(t) = -u(t) \frac{R^2}{L} e^{-(R/L)t}$	
 $v = R i_s + L \frac{di_s}{dt}$	 $v = L \delta(t) + R u(t)$	 $h(t) = L \delta'(t) + R \delta(t)$	
 $v = R i_s + \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t') dt'$	 $v = R u(t) + \frac{1}{C} r(t)$	 $h(t) = R \delta(t) + \frac{1}{C} u(t)$	

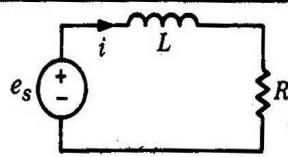
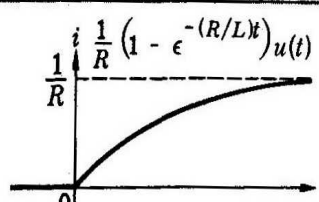
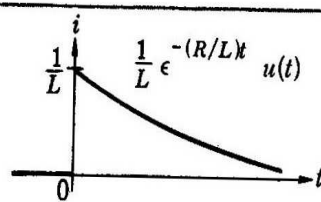
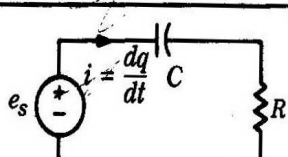
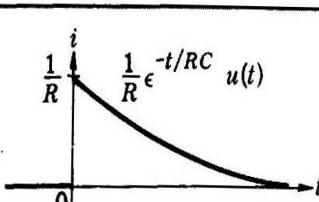
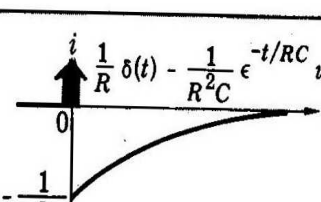
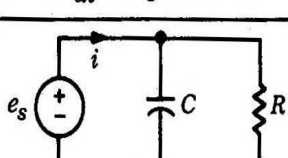
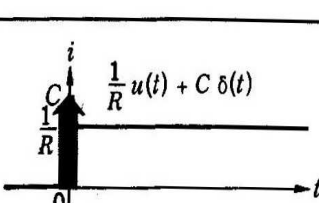
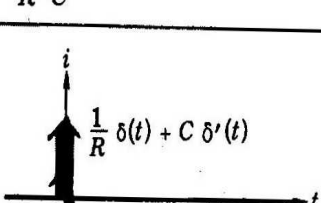
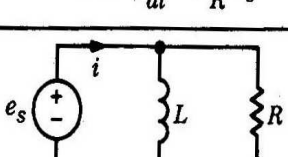
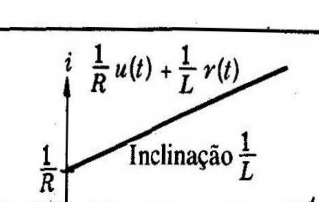
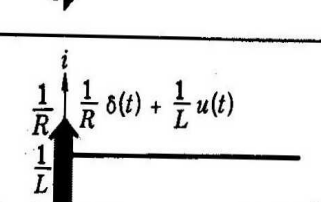
(tabela extraída de “Teoria Básica de Circuitos”, C.A. Desoer, E.S. Kuh, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979)

Excitação : $e_s(t)$

Resposta : $i(t)$

Degrau

Impulso

e_s (excitação)	i (resposta)	$\Delta(t)$	$h(t)$
 $L \frac{di}{dt} + Ri = e_s$	 $\frac{1}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) u(t)$	 $\frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$	
 $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e_s$	 $\frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$	 $\frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} u(t)$	
 $i = C \frac{de_s}{dt} + \frac{1}{R} e_s$	 $\frac{1}{R} u(t) + C \delta(t)$	 $\frac{1}{R} \delta(t) + C \delta'(t)$	
 $i = \frac{1}{R} e_s + \frac{1}{L} \int_0^t e_s(t') dt'$	 $\frac{1}{R} u(t) + \frac{1}{L} r(t)$ <p>Inclinação $\frac{1}{L}$</p>	 $\frac{1}{R} \delta(t) + \frac{1}{L} u(t)$	

(tabela extraída de “Teoria Básica de Circuitos”, C.A. Desoer, E.S. Kuh, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979)



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos

Volume 1 – Capítulo 6

Estudo de Redes de Segunda Ordem

L Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

Redes de 2ª. Ordem

Equação diferencial ordinária, linear,
coeficientes constantes, 2ª ordem

Sistemas de 2 equações de 1ª ordem

Redes $\left\{ \begin{array}{l} R, L, C \quad 1 \text{ malha ou } 1 \text{ par de nós} \\ R + 2C, \quad R + 2L \end{array} \right.$

Duas condições iniciais

v_0 resposta (t_0)

i_0 derivada da resposta (t_0)

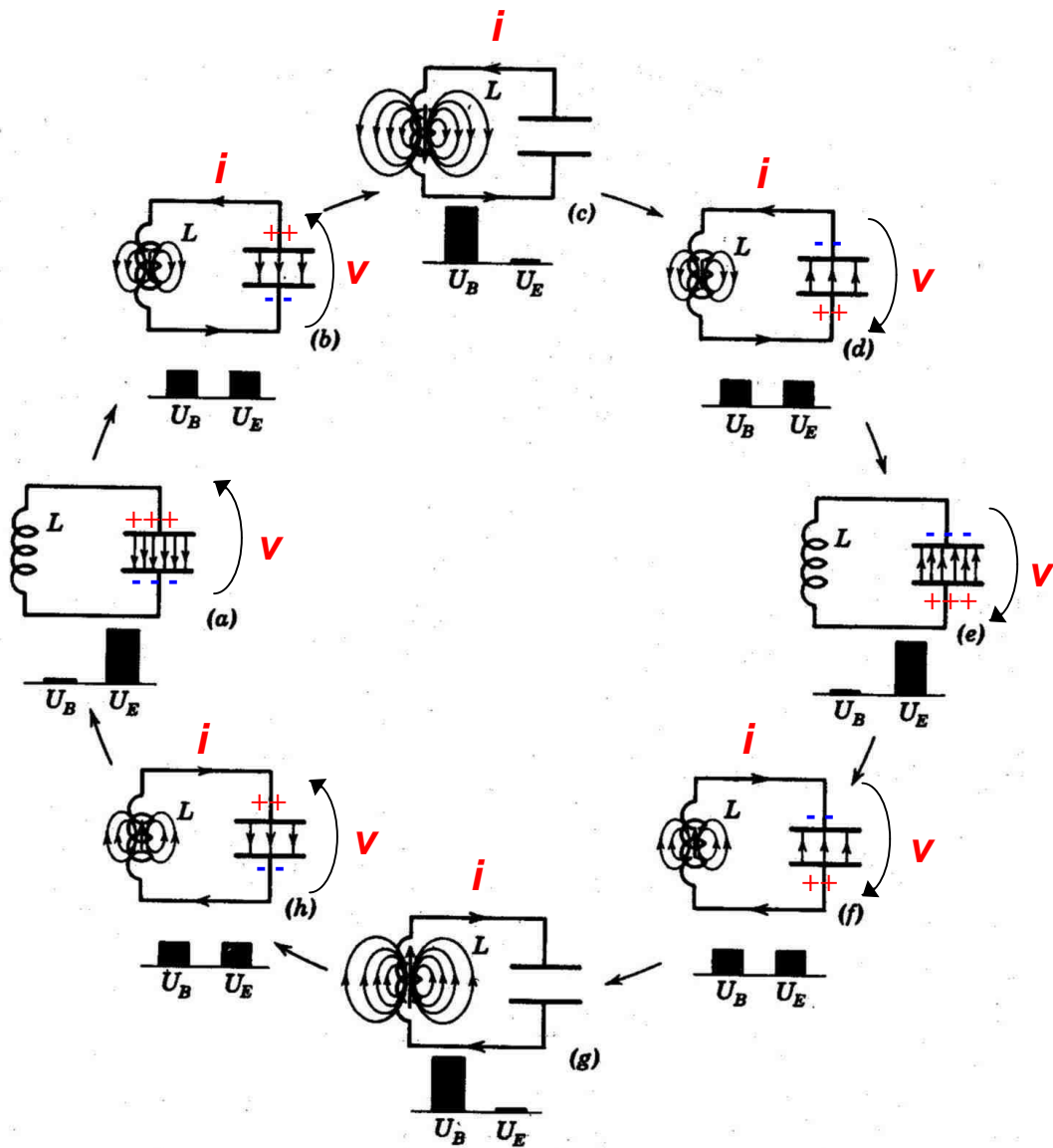
Aplicações :

Circuitos sintonizados

Filtros passa-banda

Modelos de circuitos reais

CIRCUITO LC IDEAL

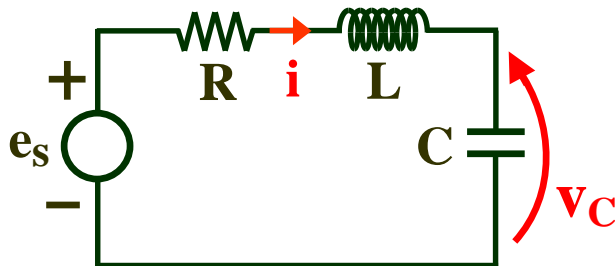


Ciclo de frequência:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Circuito R L C

Série

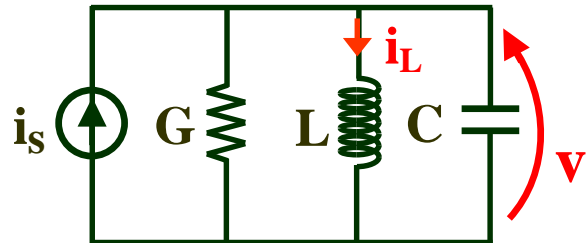


2ª L. K.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_s$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de_s}{dt}$$

Paralelo



1ª L. K.

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int v dt = i_s$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{C} \frac{di_s}{dt}$$

Comportamento Livre

$$e_s = 0$$

$$i_s = 0$$

Condições iniciais

$$i(t_0), v_C(t_0)$$

$$v(t_0), i_L(t_0)$$

Equação característica

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha \triangleq R/2L$$

$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

$$s^2 + \frac{G}{C} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha \triangleq G/2C$$

$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

Equação Característica

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

**raízes ou auto-valores ou
frequências complexas próprias**

- $s_1 \neq s_2$ **Distintos**

$$A_1 e^{s_1 t}, \quad A_2 e^{s_2 t}$$

Solução geral : $A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

- $s_1 = s_2$ **Duplos**

$$A_1 e^{s_1 t}, \quad A_2 t e^{s_1 t}$$

Solução geral : $A_1 e^{s_1 t} + A_2 t e^{s_1 t}$

Circuito R L C série

Comportamento Livre

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t} \\ \text{ou} \\ i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 t e^{s_1 t} \end{array} \right.$$

Constantes de integração : para $s_1 \neq s_2$

①

$$i(0) = I_1 + I_2$$

2ª Lei K :

$$L \frac{di(0)}{dt} + R i(0) + v(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{-R}{L} i(0) - \frac{v(0)}{L}$$

②

$$\frac{-R}{L} i(0) - \frac{v(0)}{L} = s_1 I_1 + s_2 I_2$$

2 equações

2 incógnitas

Circuito R L C série

cont.

Constantes de integração : para $s_1 = s_2$

$$\begin{cases} i(0) = I_1 & \textcircled{1} \\ -\frac{R}{L} i(0) - \frac{v(0)}{L} = s_1 I_1 + I_2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

2 equações

2 incógnitas

Soluções RLC Série

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

1 – Circuito Super – Amortecido

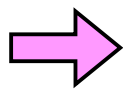
$$\alpha^2 > \omega_0^2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

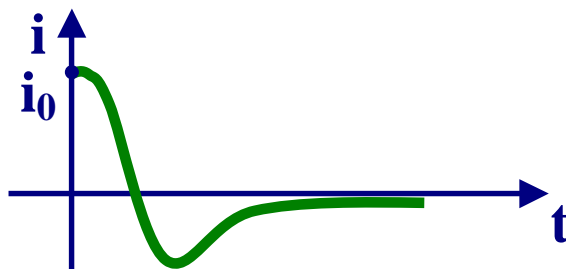
$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Solução: Σ 2 exponenciais decrescentes



$$i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} \left[i_0 \left(\cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \sinh(\beta t) \right) - \frac{v_0}{\beta L} \sinh(\beta t) \right]$$



Soluções RLC Série

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

cont.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

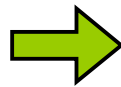
2 – Circuito Oscilatório:

$$\alpha^2 < \omega_0^2$$

ou

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j \omega_d$$



$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

(complexos conjugados)

$$i(t) = I_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + I_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

$$I_1 = I_2^*$$

$$i(t) = 2 \operatorname{Re} \left[I_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} \right]$$

$$a) i(t) = I_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)$$

$$I_m = \sqrt{i_0^2 + \left(\frac{\alpha}{\omega_d} i_0 + \frac{1}{L \omega_d} v_0 \right)^2}$$

$$\psi = \arctg \left(\frac{v_0}{L \omega_d i_0} + \frac{\alpha}{\omega_d} \right)$$

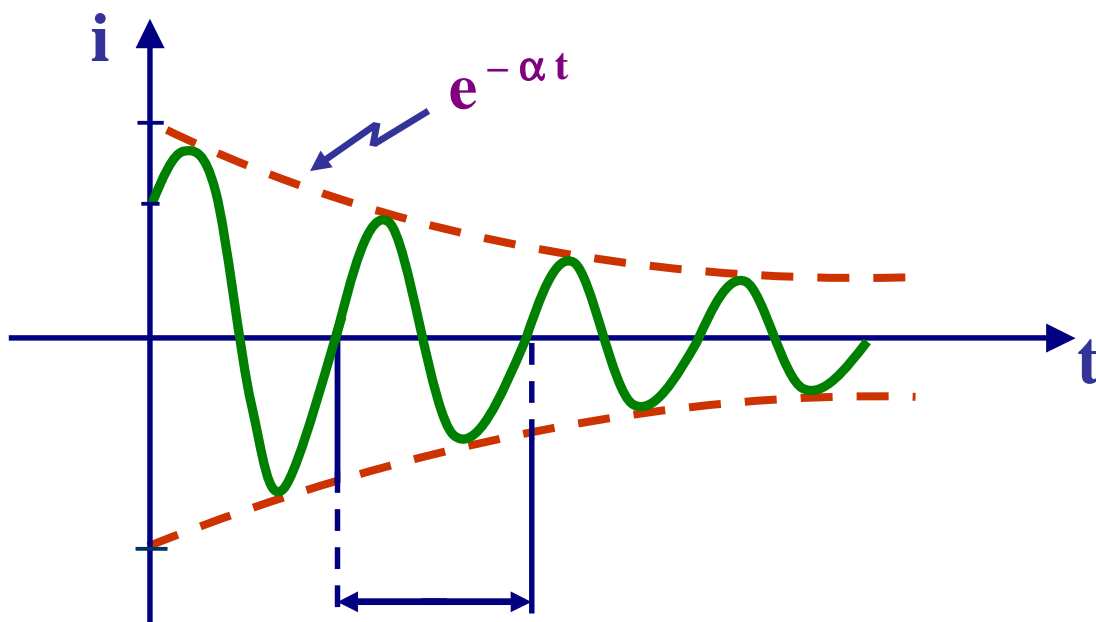
Soluções RLC Série

cont.

b) $i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$

$$B_1 = i_0$$

$$B_2 = -\frac{\alpha}{\omega_d} i_0 - \frac{v_0}{L \omega_d}$$



$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Circuito Oscilatório

Casos Particulares

a) $\alpha = 0$ $\omega_d = \omega_0$ LC ideal

$$i(t) = \sqrt{i_0^2 + \frac{C}{L} v_0^2} \cos(\omega_0 t + \psi)$$

$$\psi = \arctg \left(\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{v_0}{i_0} \right)$$

b) $\alpha \ll \omega_0 \rightarrow \omega_d \approx \omega_0$
circuito altamente oscilatório

$$i(t) \cong \sqrt{i_0^2 + \frac{C}{L} v_0^2} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi)$$

Índice de Mérito : $Q_0 \triangleq \omega_0 L / R$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \Rightarrow Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$Q \rightarrow \frac{\text{energia armazenada}}{\text{energia dissipada}}$

Soluções RLC Série

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

cont.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

3 – Amortecimento crítico

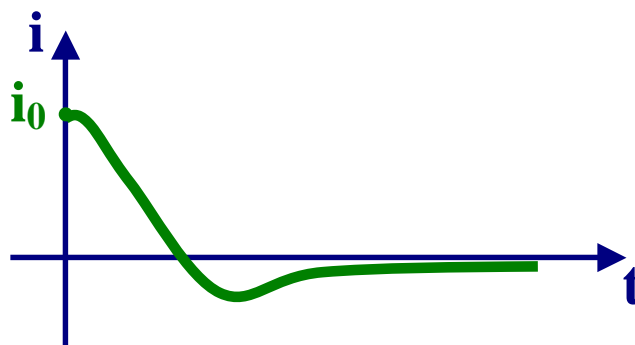
$$\alpha = \omega_0 \Rightarrow s_1 = s_2 = -\alpha$$

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

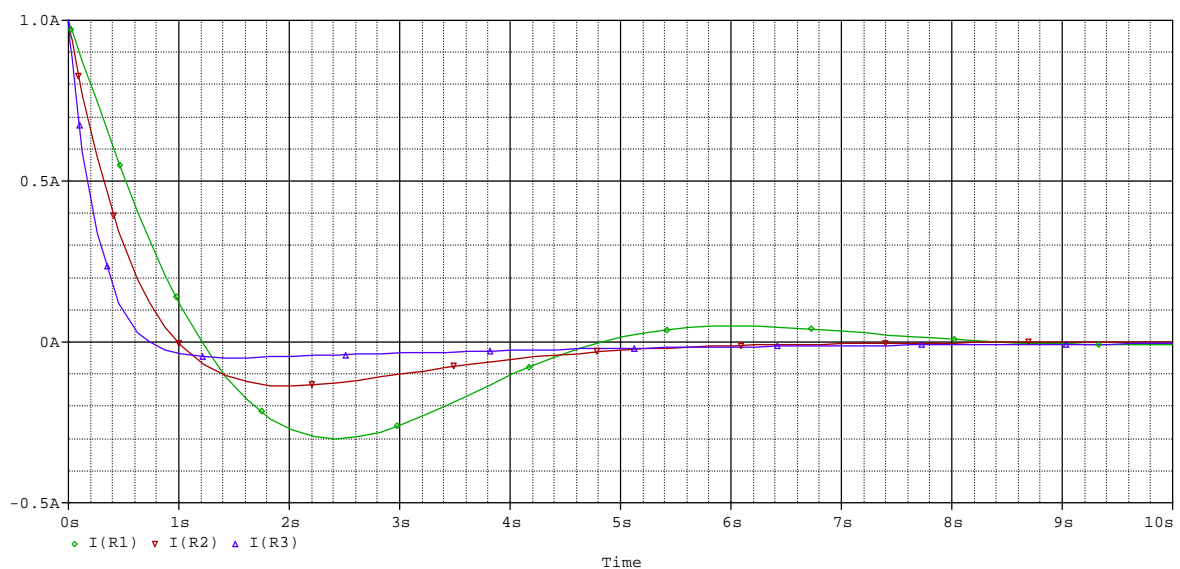
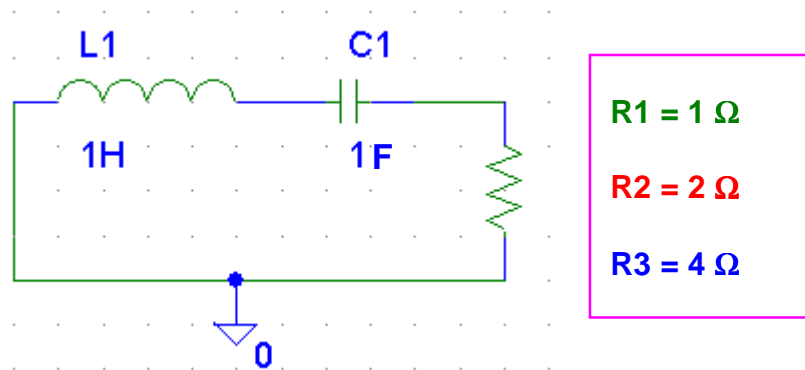
$$\text{Solução : } i(t) = I_1 e^{-\alpha t} + I_2 t e^{-\alpha t}$$

Impondo as condições iniciais :

$$i(t) = \left[(1 - \alpha t) i_0 - \frac{1}{L} v_0 t \right] e^{-\alpha t}$$



Comparação das respostas livres dos Circuitos de 2ª ordem



Oscilatório ou sub-amortecido

Amortecimento crítico

Super-amortecido

Circuito RLC - Comportamento Livre

- Resposta livre \rightarrow F C P s_1, s_2

- s_1, s_2 reais \rightarrow Pulso Bidirecional

Tempo de amortecimento: t_s

Super-amortecido $\rightarrow t_s$ grande

- s_1, s_2 complexos

Resposta oscilatória amortecida

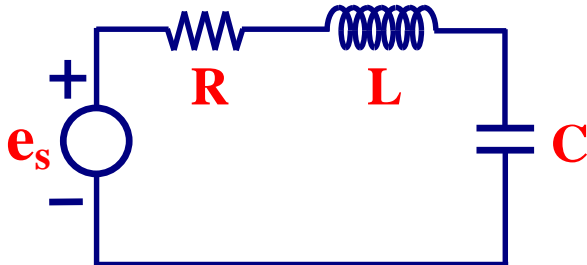
$\alpha \rightarrow$ coeficiente de amortecimento

$\omega_d \rightarrow$ frequência angular amortecida

$\omega_0 \rightarrow$ frequência angular não-amortecida

Circuito RLC

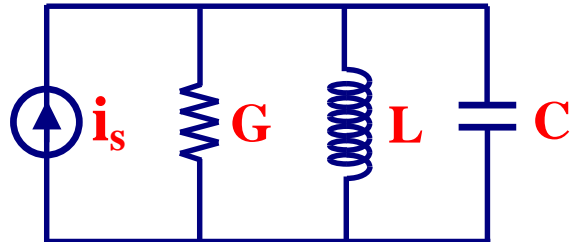
RLC Série



$$\alpha \triangleq R/2L$$

$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

RLC Paralelo



$$\alpha \triangleq G/2C$$

$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$Q_0 = \omega_0 / 2\alpha$$

$$Q_0 = \omega_0 L / R$$

$$Q_0 = \omega_0 C / G$$

$$Q_0 = \omega_0 RC$$

$$Q_0 = R / \omega_0 L$$

1 – Super-amortecido

$$R > 2 \sqrt{L/C}$$

$$R < \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$$

2 – Amortecimento crítico

$$R = R_c = 2 \sqrt{L/C}$$

$$R = R_c = \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$$

3 – Oscilatório ou Sub-amortecido

$$R < R_c$$

$$R > R_c$$

Circuito RLC

Resposta Natural

1 – $f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

super-amortecido

2 – $f(t) = B_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)$
ou
 $(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t}$

sub-amortecido / oscilatório

3 – $f(t) = (D_1 t + D_2) e^{-\alpha t}$

amortecimento crítico

$f(t) \rightarrow$ tensão ou corrente

Circuito RLC - Série

Resposta ao degrau $e_s(t) = E H(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} \int i dt + \frac{1}{L} v_0 = \frac{E}{L}$$

ou

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} \int i dt + \frac{1}{L} (v_0 - E) = 0$$

$t > 0$

Como circuito livre mas com
condição inicial $= v_0 - E$

a) Super-amortecido

$$i(t) = e^{-\alpha t} \left[i_0 \left(\cosh \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right) - \frac{(v_0 - E)}{\beta L} \sinh \beta t \right]$$

Se $i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh \beta t$$

b) Oscilatório $i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

c) Amortecimento crítico $i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}$$

Circuito RLC

Resposta ao Degrau

1 –

$$f(t) = f_p + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

super-amortecimento

2 –

$$f(t) = f_p + B_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi) e^{-\alpha t}$$

ou

$$f(t) = f_p + (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t}$$

oscilatório

3 –

$$f(t) = f_p + (D_1 t + D_2) e^{-\alpha t}$$

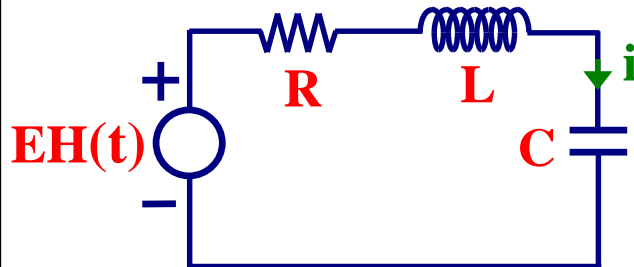
amortecimento crítico

$f(t)$ → tensão ou corrente

f_p → valor final da resposta desejada

Circuito RLC

RLC Série



$$t \rightarrow \infty$$

$$v_C \rightarrow E$$

$$v_R \rightarrow 0$$

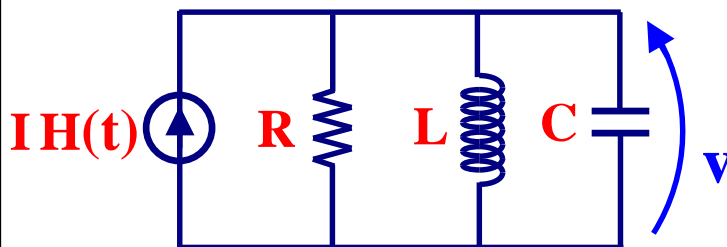
$$v_L \rightarrow 0$$

L curto

C aberto

$$i \rightarrow 0$$

RLC Paralelo



$$t \rightarrow \infty$$

$$i_C \rightarrow 0$$

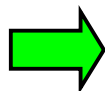
$$i_R \rightarrow 0$$

$$i_L \rightarrow I$$

$$v \rightarrow 0$$

Resposta ao Impulso

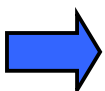
$$e_s(t) = \psi \delta(t)$$



Degrau de corrente no
indutor = ψ/L

RLC série

$$i_s(t) = Q \delta(t)$$



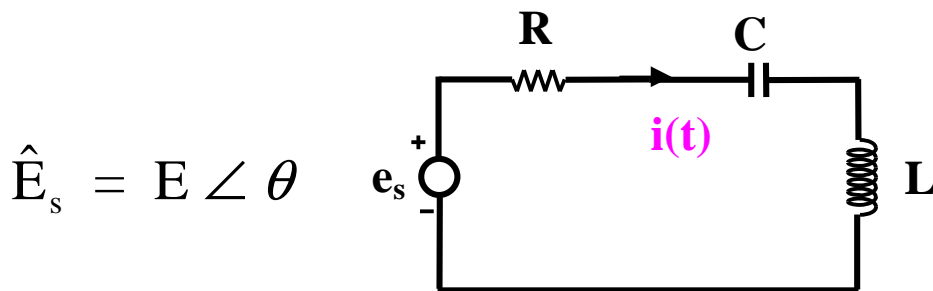
Degrau de tensão no
capacitor = Q/C

RLC paralelo

$t > 0 \rightarrow$ Comportamento livre

CIRCUITO RLC SÉRIE

Excitação Senoidal



Resposta Completa : **Transitória** + **Permanente**



depende das
FCP

Fasores,
Impedâncias

$$Z(j\omega) = \frac{\vec{E}_s}{\vec{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$i_p(t) = \text{Re} (\vec{I} e^{j\omega t})$$

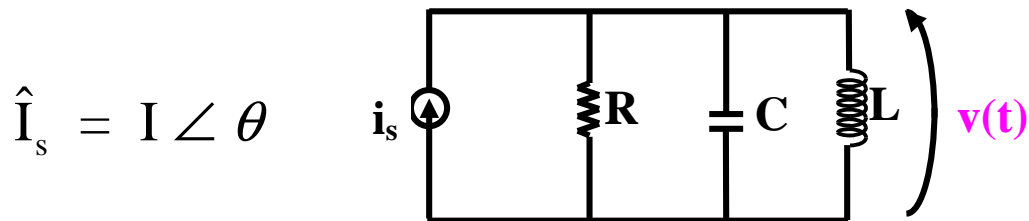
$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + |\vec{I}| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

Oscilatório :

$$i(t) = I_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta_1) + |\vec{I}| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

CIRCUITO RLC PARALELO

Excitação Senoidal



Resposta Completa : **Transitória** + **Permanente**



depende das
FCP



Fasores,
Admitâncias

$$Y(j\omega) = \frac{\vec{I}_s}{\vec{V}} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$v_p(t) = \text{Re} (\vec{V} e^{j\omega t})$$

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + |\vec{V}| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

Oscilatório :

$$v(t) = V_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta_1) + |\vec{V}| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

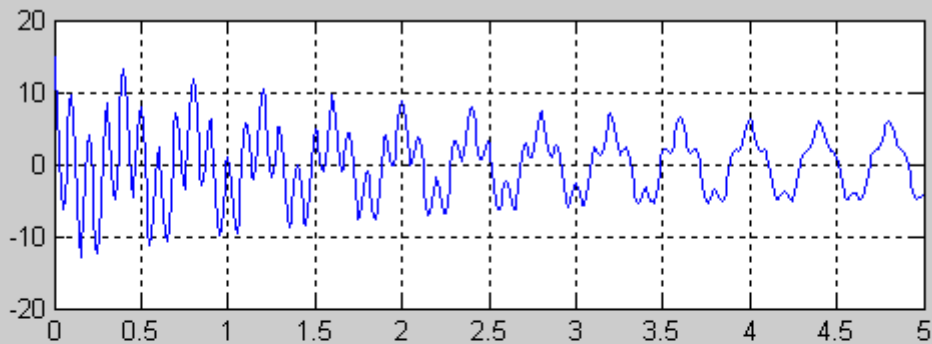
Circuito RLC

Transitório com excitação senoidal

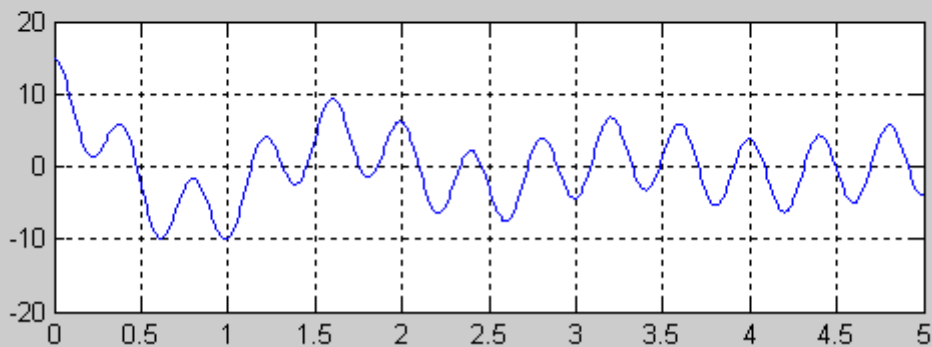
Oscilatório :

$$v(t) = V_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta_1) + |\vec{V}| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

a)



b)

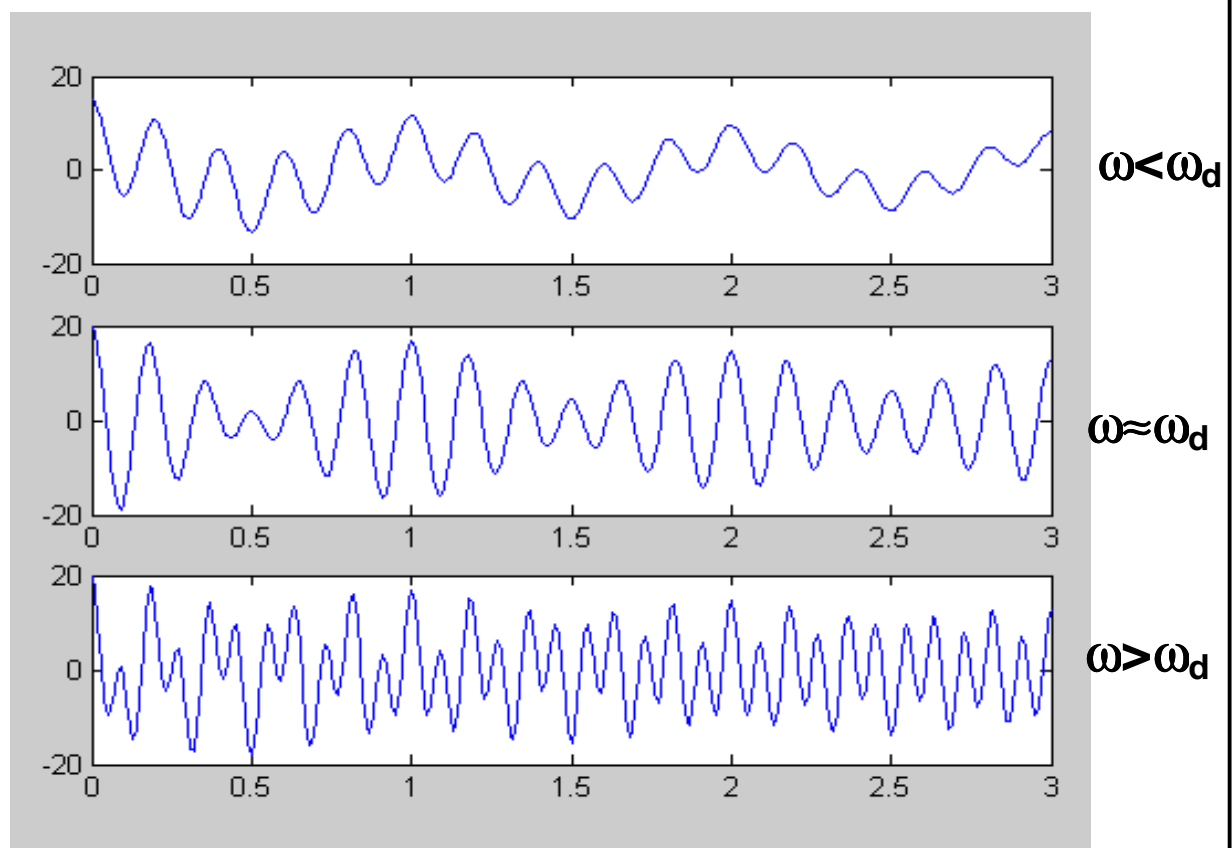


a) $\omega_d \approx 4\omega$

b) $\omega_d \approx 0,2\omega$

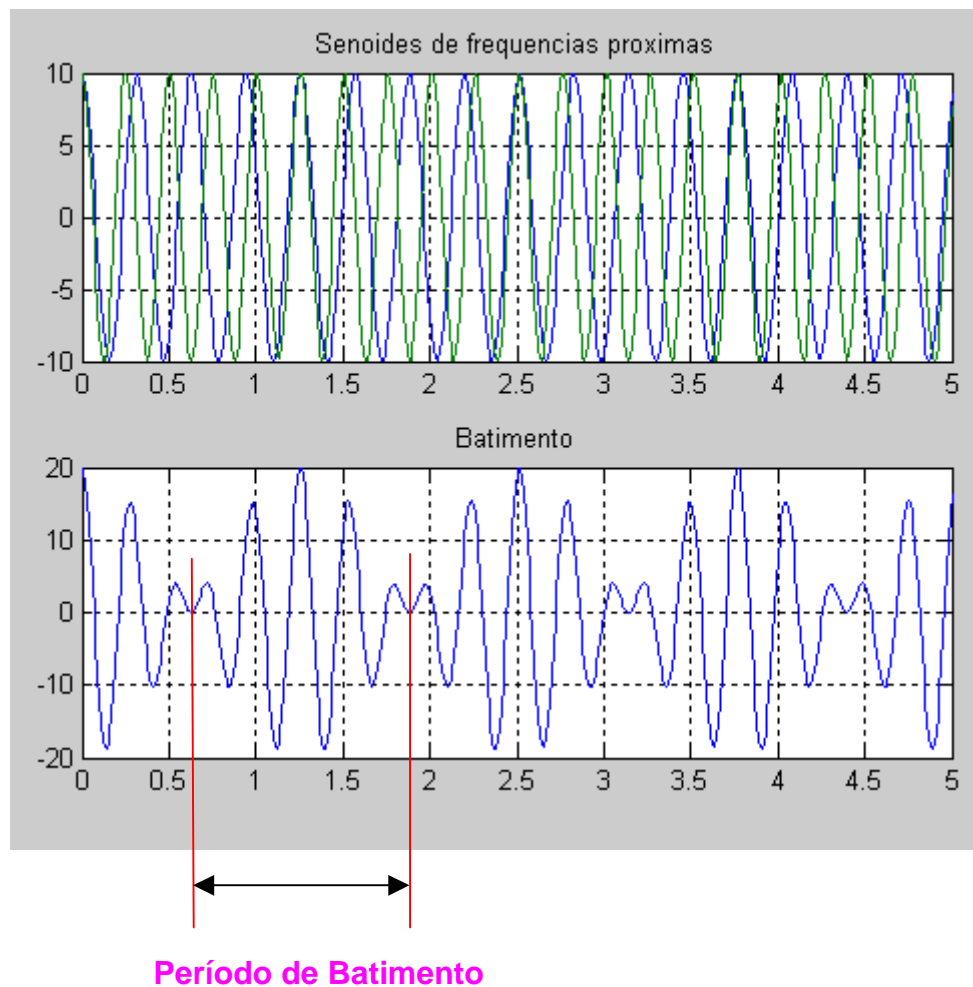
Circuito RLC

Transitório com Excitação Senoidal



Batimento

Soma de 2 senóides de frequências próximas: $\omega_1 \approx \omega_2$



Resultado: Senóide de frequência

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

com **Envoltória:** Senóide de frequência

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Frequência de Batimento:

$$\omega_1 - \omega_2$$

Ressonância

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\phi = \arctan [(\omega L - 1/\omega C) / R]$$

$$\text{Para } \omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

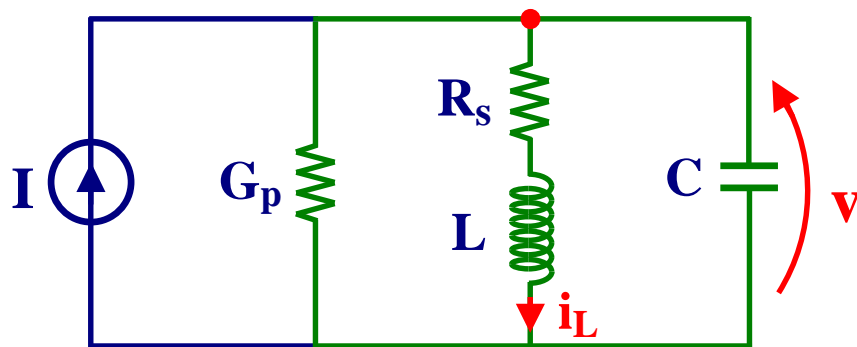
$$\phi = 0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \text{ e } \hat{\mathbf{V}} \text{ em fase}$$

$$Z = R \rightarrow \text{impedância puramente resistiva}$$

$$|\hat{\mathbf{I}}|_{\max} \rightarrow \text{resposta máxima permanente}$$

$$|\hat{\mathbf{I}}| = \frac{|\hat{\mathbf{E}}_s|}{|Z|}$$

Outros Circuitos de 2a. Ordem



$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ LK : } C \frac{dv}{dt} + G_p v + i_L = 0 \\ 2^{\text{a}} \text{ LK : } L \frac{di_L}{dt} + R_s i_L = v \end{array} \right.$$

Equação Resultante :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \underbrace{\frac{L G_p + R_s C}{LC}}_{2\alpha} \frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{R_s G_p + 1}{LC}}_{\omega_0^2} v = 0$$

Condições iniciais :

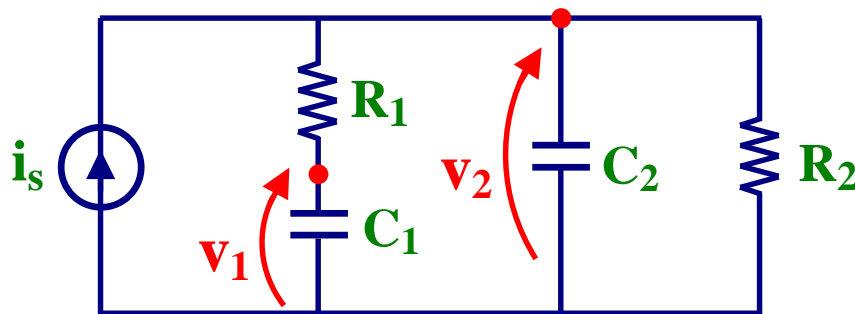
$$v(t_0) = v_0 \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_0} = \frac{-1}{C} (i_{L0} + G_p v_0)$$

Resposta Permanente : $v_p(t) = \frac{I R_p}{R_s + R_p} R_s$

Resposta Completa :

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + v_p(t)$$

Outros Circuitos de 2a. Ordem



$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ LK} : C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{R_1} \\ 1^{\text{a}} \text{ LK} : C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} + i_s \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_1}{dt} + \omega_0^2 v_1 = i_s$$

FCP reais negativas !

Para $i_s(t) = I H(t) \rightarrow$ resposta permanente:

$$v_{p1}(t) = I R_2$$

Resposta completa :

$$v_1(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + v_{p1}(t)$$



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos

Volume 1 – Capítulo 7

Introdução à Transformação de Laplace

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

Introdução à Transformada de Laplace

Solução de Circuitos no Domínio do Tempo →

- Equações não-homogêneas → apenas **alguns** tipos de excitação
- Redes de ordem mais alta → **sistemas** de equações **íntegro-diferenciais**
- Problema de descontinuidades → imposição de **condições iniciais**

INTRODUÇÃO À TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

Ações da Transformada de Laplace:

Derivadas → **Multiplicações**
Integrais → **Divisões**

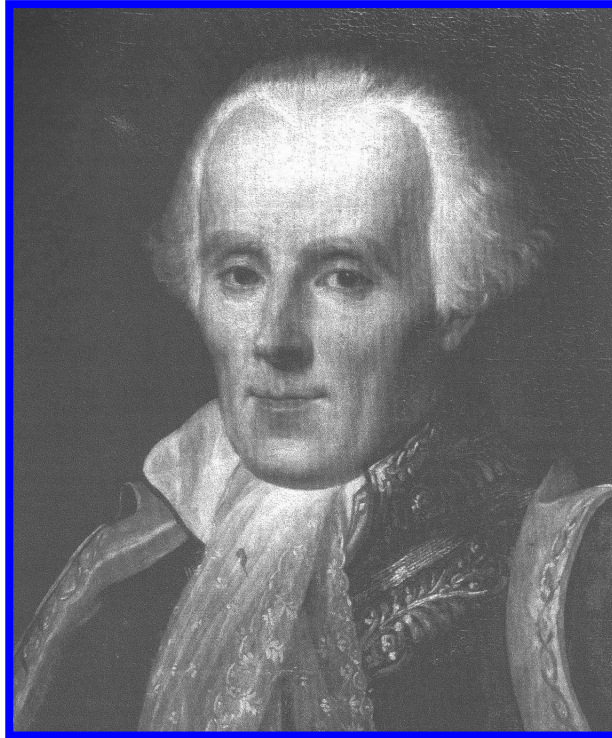
Equações íntegro-diferenciais → equações
algébricas no campo complexo

**Solução no Domínio da Frequência
Complexa**

Anti-transformada → solução da equação
diferencial

Inclui o problema do valor inicial

Pierre Simon, marquês de Laplace



- Francês (Normandia, 1749; Paris, 1827)
- Líder em Física-Matemática
- Ministro do Interior no império de Napoleão e marquês na restauração dos Bourbons
- Obra mais importante: *Mécanique céleste*
- Importante trabalho em astronomia, cálculo integral, equações diferenciais e teoria das probabilidades.

Transformada de Laplace

$f(t) \rightarrow$ função real ou complexa

definida em $[0, \infty)$

$$\mathcal{L} [f (t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Transformação Integral

$$s = \sigma + j \omega \quad (\text{variável complexa, 1/seg})$$

$$F(s) = \mathcal{L} [f (t)]$$

$$\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{s}$$

Domínio do **tempo** \rightarrow Domínio da **frequência complexa**

Funções \mathcal{L} -transformáveis

Condições suficientes:

$f(t)$ \rightarrow contínua e integrável em intervalos

$f(t)$ \rightarrow ordem exponencial

i.e. se $|f(t)| < A.e^{\alpha t}$

para $0 < t < \infty$, A, α reais

ou seja, $\exists \lim e^{-s_0 t} \cdot f(t)$

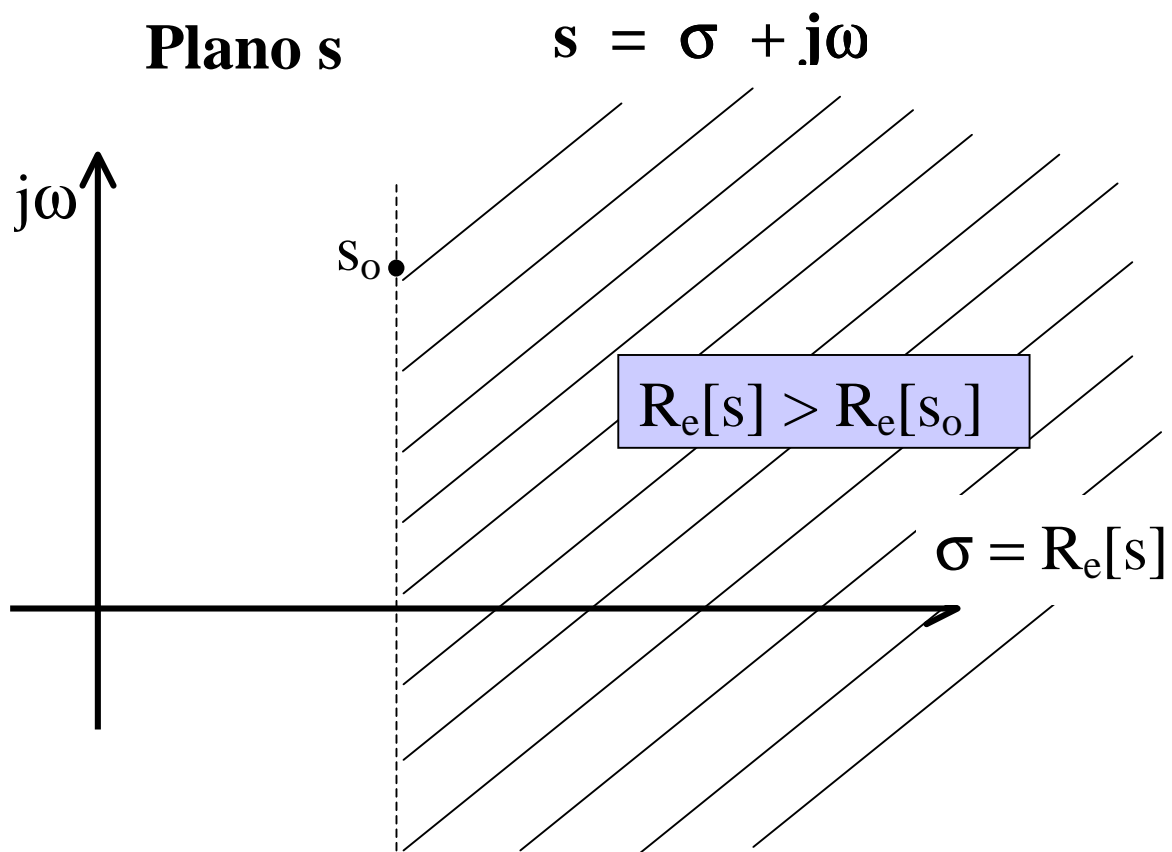
para algum valor de s_0

$s_0 \rightarrow$ **abscissa de convergência**

\Rightarrow a integral é convergente para

$\text{Re}[s] > \text{Re}[s_0]$

Região de Convergência



$s_0 \rightarrow$ **abscissa de convergência**

\Rightarrow a integral $\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$

é convergente para $\text{Re}[s] > \text{Re}[s_0]$

Transformada de Laplace

- \exists Transformada **Bilateral** : $\int_{-\infty}^{+\infty}$
- **Unilateral** \rightarrow mais apropriada para Circuitos

- Funções não \mathcal{L} - transformáveis:

Ex. : e^{e^t} , e^{t^2} , t^t

- Funções com impulso ou descontinuidade em $t=0 \rightarrow$

Integral **inclui**, pois é tomada de **$t=0^-$**

- **Anti-transformação:**

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Unicidade !

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L} [f (t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$s = \sigma + j \omega$$

$$F(s) = \mathcal{L} [f (t)]$$

Linearidade:

$$\mathcal{L} [c_1 \cdot f_1 (t) + c_2 \cdot f_2(t)] =$$

$$c_1 \cdot F_1 (s) + c_2 \cdot F_2 (s)$$

c_1, c_2 constantes

Transformada de Laplace de Funções

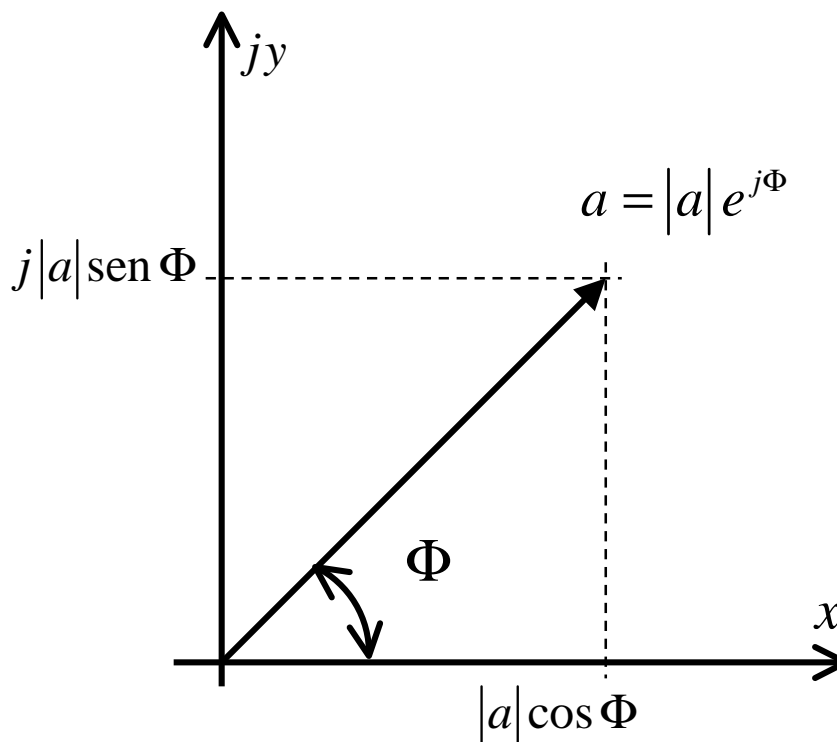
$f(t)$	$F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1

Fórmulas de Euler-Moivre e Representação Gráfica de Complexos

$$e^{j\Phi} = \cos \Phi + j \sen \Phi$$

$$\cos \Phi = \frac{1}{2} (e^{j\Phi} + e^{-j\Phi})$$

$$\sen \Phi = \frac{1}{2j} (e^{j\Phi} - e^{-j\Phi})$$



Teorema da Derivada da Transformada de Laplace

$$\mathcal{L} [f (t)] = F(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} [t . f (t)] = - \frac{d}{ds} F(s)$$

Aplicação para a função **degrau**:

$$\mathcal{L} [H (t)] = 1 / s$$

$$\mathcal{L} [t . H (t)] = 1 / s^2$$

$$\mathcal{L} [t^2 . H (t)] = 2 / s^3$$

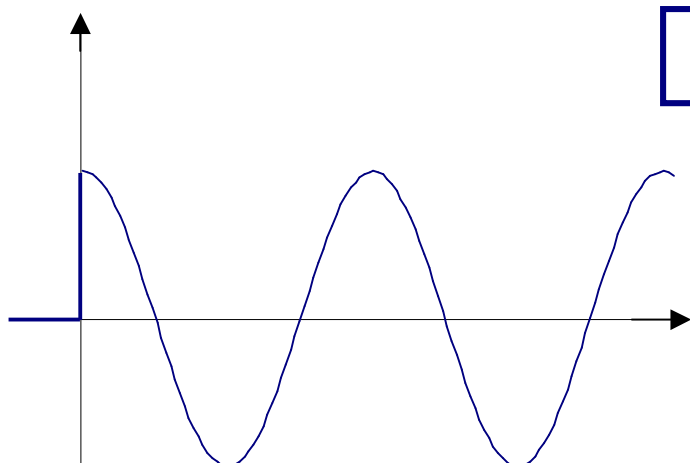
⋮

$$\mathcal{L} [t^n . H (t)] = n! / s^{n+1}$$

Teorema do Deslocamento no campo real

$$\mathcal{L} [f (t)] = F(s) \Rightarrow$$

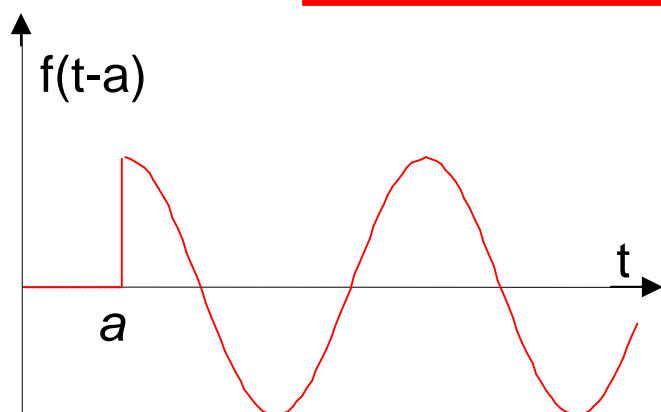
$$\mathcal{L} [f (t - a)] = e^{-as} \cdot F(s)$$



$$f(t) = \cos \omega t \cdot H(t)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t-a) = \cos [\omega(t-a)] \cdot H(t-a)$$



$$F(s) = \frac{e^{-as} \cdot s}{s^2 + \omega^2}$$

Translação no Campo Complexo

$$\mathcal{L} [e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a)$$

Multiplicação de argumento por constante

$$\mathcal{L} [f(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \cdot F(s / \omega)$$

Transformada de funções periódicas

$$\mathcal{L} [f(t)] = \frac{1}{1 - e^{sT}} \int_{0_-}^T e^{-st} \cdot f(t) dt$$

Exemplo de Cálculo com o MATLAB (Tool Kit Symbolic)

```
» syms a s t w  
» f=exp(-a*t)*cos(w*t)  
f =
```

```
exp(-a*t)*cos(w*t)
```

```
» L=Laplace(f,t,s)
```

```
L =
```

```
(s+a)/((s+a)^2+w^2)
```

```
» pretty(L)
```

$$\frac{s + a}{(s + a)^2 + w^2}$$

Teorema da Derivada

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f^{(n)}(t)] &= s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0_-) - \\ &\quad - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-) \end{aligned}$$

Caso Particular: c.i.q.

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s)$$

Teorema da Integral

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau}{s}$$

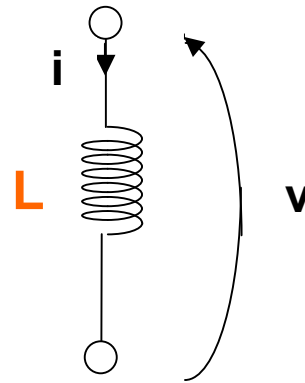
Caso Particular: c.i.q.

$$\mathcal{L} \left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Transformada de Laplace

Indutor

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



$$V(s) = \mathcal{L} [v(t)]$$

$$I(s) = \mathcal{L} [i(t)]$$

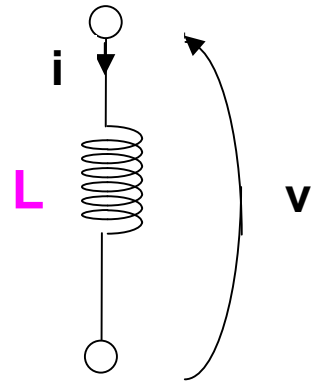
$$V(s) = s L I(s) - L i(0_-)$$

Fluxo em $t=0_-$.

Transformada de Laplace

Indutor

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$



$$I(s) = \mathcal{L} [i(t)]$$

$$V(s) = \mathcal{L} [v(t)]$$

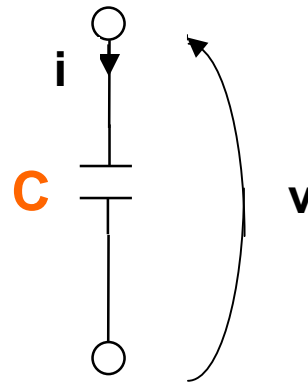
$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \underbrace{\frac{1}{sL} \int_{-\infty}^{0_-} v(\tau) d\tau}_{i(0_-)}$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0_-)}{s}$$

Transformada de Laplace

Capacitor

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



$$I(s) = \mathcal{L} [i(t)]$$

$$V(s) = \mathcal{L} [v(t)]$$

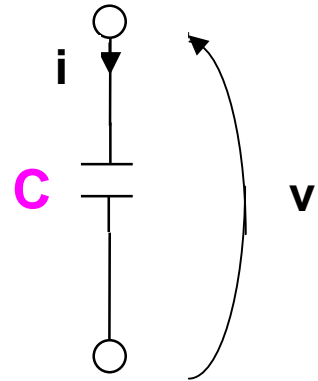
$$I(s) = s C V(s) - C v(0_-)$$

Carga em $t=0_-$.

Transformada de Laplace

Capacitor

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$



$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$$

$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{1}{sC} \int_{-\infty}^{0_-} i(\tau) d\tau$$

$v(0_-)$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0_-)}{s}$$

Inversão da Transformada de Laplace

Anti-Transformada:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

Unicidade : $f(t) \leftrightarrow F(s)$

1º. Método $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Tabelas} \\ \bullet \text{ Linearidade} \\ \bullet \text{ Teoremas} \end{array} \right.$

2º. Método : Fórmula de inversão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

integral sobre a reta $s=\sigma$

Inversão da Transformada de Laplace

3º. Método : Anti-transformação de Funções Racionais

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n}$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad a_0, b_0 \neq 0$$

Forma Fatorada:

$$F(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

$$K = \text{fator de escala (ganho)} = \frac{b_0}{a_0}$$

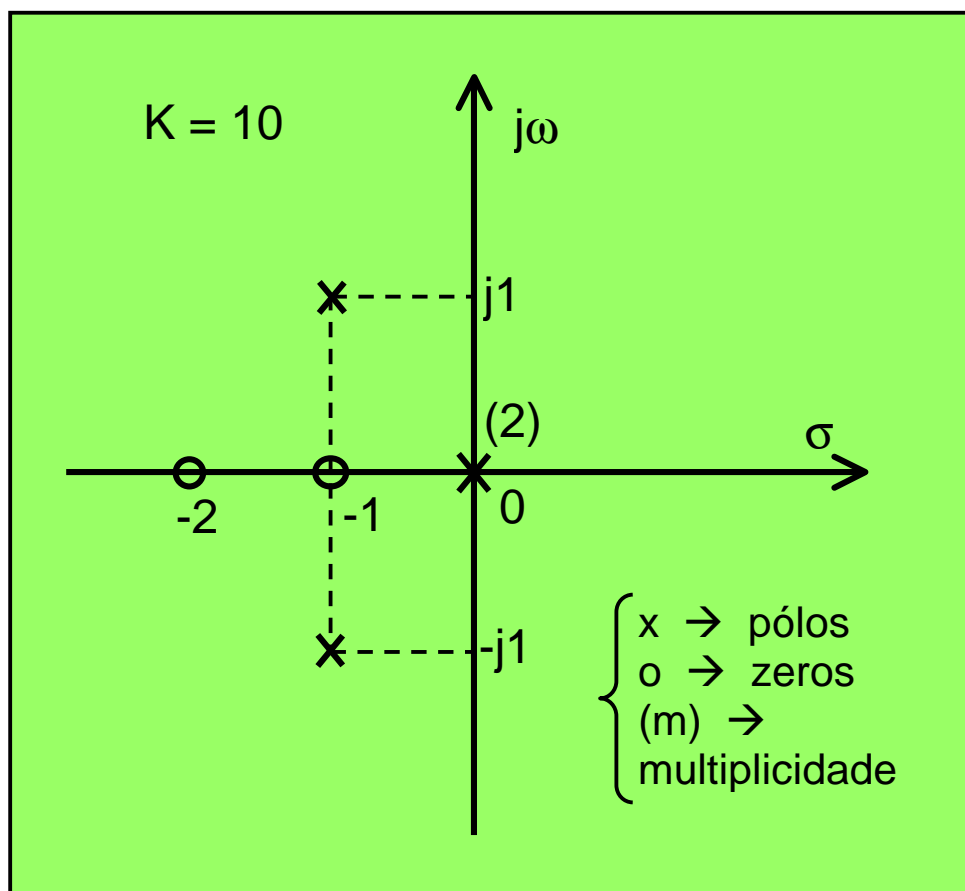
$z_i \rightarrow$ zeros ($i = 1, 2, \dots, m$)

$p_k \rightarrow$ pólos $\left\{ \begin{array}{l} \text{simples ou múltiplos} \\ \text{reais ou complexos} \end{array} \right.$
($k = 1, 2, \dots, n$)

Diagrama de pólos e zeros de Funções Racionais

$$F(s) = \frac{10.(s^2 + 3s + 2)}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} = 10. \frac{(s + 1)(s + 2)}{s^2 [(s + 1)^2 + 1]}$$

- um pólo duplo na origem: $p_{1,2} = 0$
- dois pólos complexos conjugados: $p_{3,4} = (-1 \pm j 1)$
- dois zeros simples: $z_1 = -1$; $z_2 = -2$
- fator de escala: $K = 10$



Anti-transformação de Funções Racionais

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n}$$

Própria : $m \leq n$

{ Estritamente própria : $m < n$
 $a_0 = 1 \rightarrow$ polinômio $D(s)$ é mônico

Expansão em Frações Parciais:

$$F(s) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} A_{kj} \frac{1}{(s - p_k)^j}$$

A_{kj} = resíduos – coeficientes a determinar

p_k = k-ésimo pólo

m_k = multiplicidade do k-ésimo pólo

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_q) = n = \text{grau de } D(s)$$

Anti-transformação de Funções Racionais

Expansão em Frações Parciais:

$$F(s) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} A_{kj} \frac{1}{(s - p_k)^j}$$

Anti-transformar termo a termo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s - p_k)^j} \right] = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_k t}$$

↗ Derivada da Transformada
↘ Translação no campo complexo

Contribuição de Pólos Complexos

$$A_k e^{p_k t} + A_k^* e^{p_k^* t} = 2 \Re [A_k e^{p_k t}]$$

1º. caso

Resíduo : $A_k = |A_k| e^{j \phi_k}$

Pólo : $p_k = \sigma_k + j \omega_k$

$$2 \Re [A_k e^{p_k t}] = 2 |A_k| e^{\sigma_k t} \cos (\omega_k t + \phi_k)$$

2º. caso

Resíduo : $A_k = A_k' + j A_k''$

Pólo : $p_k = \sigma_k + j \omega_k$

$$2 \Re [A_k e^{p_k t}] =$$

$$2 e^{\sigma_k t} [A_k' \cos (\omega_k t) - A_k'' \sin (\omega_k t)]$$

Pólos Múltiplos - Exemplo

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1) (s - p_2)^2 (s - p_3)^3}$$

$$F(s) = \frac{A_{11}}{(s - p_1)} + \frac{A_{21}}{(s - p_2)} + \frac{A_{22}}{(s - p_2)^2} \\ + \frac{A_{31}}{(s - p_3)} + \frac{A_{32}}{(s - p_3)^2} + \frac{A_{33}}{(s - p_3)^3}$$

Transformada de Laplace

Exemplo 1

$$\frac{20 s^2 + 60 s + 40}{2 s^4 + 4 s^3 + 4 s^2}$$

Expansão em Frações Parciais:

$$\frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{s^2} + \frac{A_2}{(s + 1 - j)} + \frac{A_2^*}{(s + 1 + j)}$$

$$A_{11} = 5$$

$$A_{12} = 10$$

$$A_2 = 2,5 (-1 + j)$$

$$A_2^* = 2,5 (-1 - j)$$

Anti-transformada:

$$5 + 10 t + 5\sqrt{2} e^{-t} \cos (t + 135^\circ)$$

ou

$$5 + 10 t - 5 e^{-t} [\cos t + \sin t]$$

Transformada de Laplace

Exemplo 2

$$\frac{s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Expansão em Frações Parciais:

$$s + 2 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 1)} + \frac{A_3}{(s + 2)}$$

$$A_1 = 0,5 \quad A_2 = 2 \quad A_3 = -6,5$$

Anti-transformada:

$$\delta'(t) + 2 \delta(t) + 0,5 + 2 e^{-t} - 6,5 e^{-2t}$$

PROGRAMA DE MATLAB PARA CÁLCULO DE PÓLOS, ZEROS E RESÍDUOS DE FUNÇÕES RACIONAIS

%arq. polres.m

LQO, 08/2005

% Vetor dos coeficientes do numerador:

num = [-4 -1 1];

% Vetor dos coeficientes do denominador:

den = [1 3 2 0];

% Cálculo dos pólos (p), resíduos (R) e termos em
potências de s (k)

% (estes últimos no caso de funções não
estritamente próprias):

[R, p, k] = residue(num, den)

$$F(s) = \frac{-4s^2 - s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Decomposição de função racional através do MATLAB

Resultados:

>> polres

R =
-6.5000
2.0000
0.5000

p =
-2
-1
0

k = 1 2

$$\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 1)} + \frac{A_3}{(s + 2)}$$

$$A_1 = 0,5$$

$$A_2 = 2$$

$$A_3 = -6,5$$



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

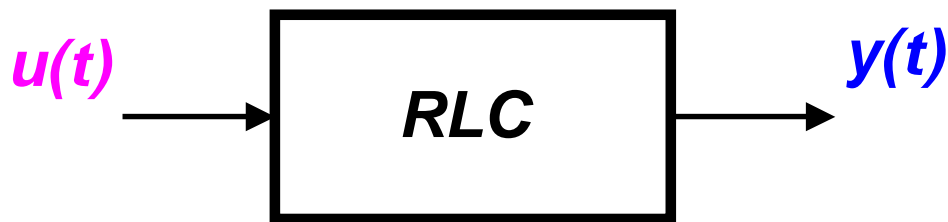
Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 8

Transformação de Laplace e Funções de Rede

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

DESCRIÇÃO ENTRADA-SAÍDA DE UM CIRCUITO RLC , LINEAR E INVARIANTE NO TEMPO

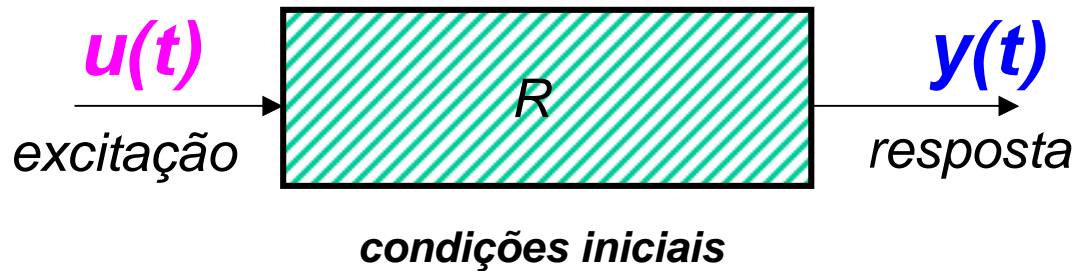


$u(t)$ = entrada ou excitação (**causa**)

$y(t)$ = saída ou resposta (**efeito**)

A descrição **entrada-saída** deste circuito será uma *equação diferencial a coeficientes constantes*, relacionando $u(t)$, $y(t)$ e suas derivadas

Respostas dos Circuitos



$$y(t) = \text{Livre} + \text{Forçada}$$

(entrada zero) (estado zero)

c.i.q.

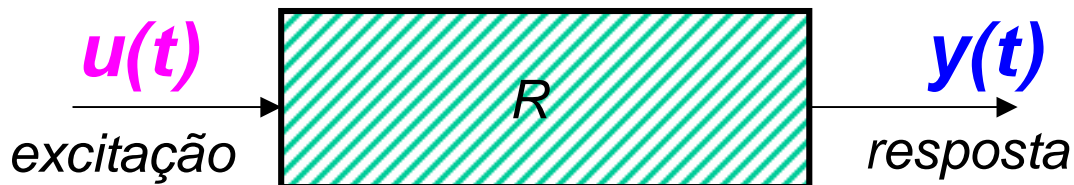
$$y(t) = \text{Transitório} + \text{Permanente}$$

↓

(tende a zero para $t \rightarrow \infty$,
nos circuitos **assintoticamente estáveis**)

$$y(t) = \text{resposta completa}$$

Resolução de Circuitos



Modelo matemático \longrightarrow
equação diferencial

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t)$$

Condições iniciais:

$$y(0_-) = \alpha_0$$

$$\dot{y}(0_-) = \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0_-) = \alpha_{n-1}$$

Resolução

\searrow
Transformada de Laplace

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t)] = \mathcal{L} [u(t)]$$

Teorema da Derivada:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) \cdot Y(s) = U(s) + \alpha_0 s^{n-1} + (\alpha_1 + a_1 \alpha_0) s^{n-2} + \dots + \dots + (\alpha_{n-1} + a_1 \alpha_{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha_0)$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{D(s)} + \frac{p_{ci}(s)}{D(s)}$$

\mathcal{L} [resposta em estado zero]

\mathcal{L} [resposta em entrada zero]

D(s) → polinômio característico (mônico !)

Teorema da Derivada

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f^{(n)}(t)] &= s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0_-) - \\ &\quad - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-) \end{aligned}$$

Caso Particular: c.i.q.

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s)$$

Função de Rede



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{\text{c.i.q.}}$$

ou

$$G(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{U(s)}$$

P. V. I.

Equações diferenciais lineares a
coeficientes constantes
+ condições iniciais

(domínio do tempo)

\mathcal{L}

Equações algébricas na variável complexa

s

(domínio das freqüências complexas)

\mathcal{L}^{-1}

c.i.n.

Solução do P.V.I.

(no domínio
do tempo)

Funções de rede

$$G(s)$$

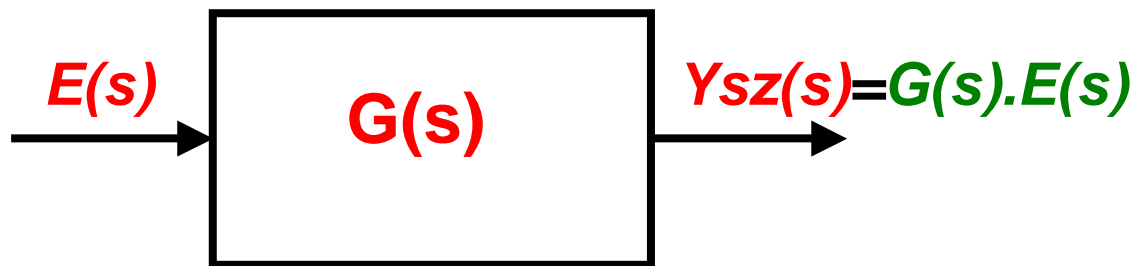
FUNÇÃO DE REDE

ou

Função de Transferência

ou

Função de Sistema

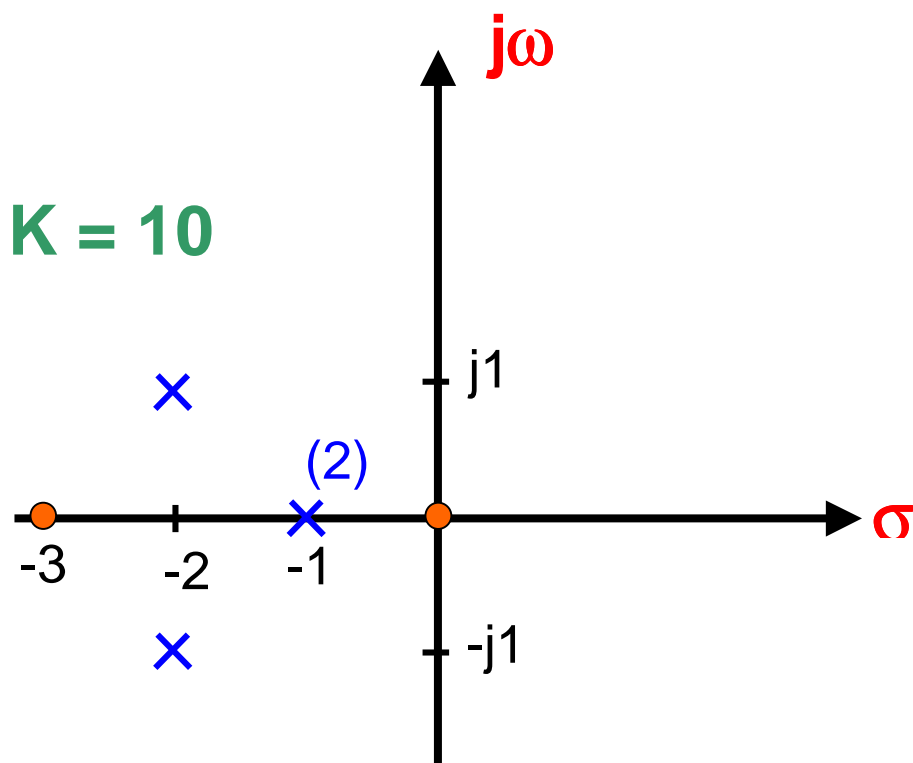


Resposta Forçada (Estado Zero) \Rightarrow c.i.n.

$$y_{sz}(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y_{sz}(s)]$$



FUNÇÃO DE REDE



$$F(s) = 10 \frac{s^2 + 3s}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 14s + 5}$$

Representação gráfica no
plano $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$

Resolução de Circuitos

Modelo matemático \longrightarrow

equação íntegro-diferencial

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_2 \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = u(t)$$

$$y(0_-) = \alpha_0$$

Teorema da Integral:

$$sY(s) - \alpha_0 + a_1 Y(s) +$$

$$+ a_2 \left[\frac{1}{s} Y(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0_-} y(\lambda) d\lambda \right] = U(s)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_{-1}}$$

Obtendo $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{sU(s)}{s^2 + a_1s + a_2} + \frac{s\alpha_0 - a_2\alpha_{-1}}{s^2 + a_1s + a_2}$$

\mathcal{L} [resposta em
estado zero]

\mathcal{L} [resposta em
entrada zero]

Polinômio característico:

$$D(s) = s^2 + a_1s + a_2$$

Função de Rede:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Teorema da Integral

- Para integral de $-\infty$ a t :

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau}{s}$$

- Para integral de 0_- a t :

$$\mathcal{L} \left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Cálculo das Funções de Rede

*SÓ PARA REDES LINEARES
INVARIANTES NO TEMPO*

Aplicar a transformação de Laplace a uma descrição entrada-saída da rede, com condições iniciais nulas

Tipos de descrição entrada-saída:

a- Equação diferencial linear, a coeficientes constantes

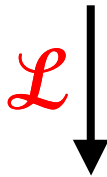
b- Equação íntegro-diferencial linear, a coeficientes constantes

c- Sistemas de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

a1 - Por equação diferencial sem derivada no segundo membro:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = \\ = u(t) \\ \text{condições iniciais nulas!} \end{array} \right.$$



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

PÓLOS DE $G(s)$ = ZEROS DE $D(s)$

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

a2 - Por equação diferencial com derivada no segundo membro:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = \\ = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} \dot{u}(t) + b_m u(t) \\ \text{condições iniciais nulas!} \end{array} \right.$$



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

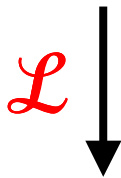
$$\text{PÓLOS DE } G(s) = \text{ZEROS DE } D(s)$$

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

b - Por equação íntegro-diferencial:

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_2 \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = u(t)$$

condições iniciais nulas



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

c - Por sistema de equações diferenciais:

Exemplo de 2a. ordem:

$$\begin{cases} (a_{11}.D + b_{11}) y_1 + (a_{12}.D + b_{12}) y_2 = u_1 \\ (a_{21}.D + b_{21}) y_1 + (a_{22}.D + b_{22}) y_2 = u_2 \end{cases}$$

onde $D \equiv d/dt$ é o operador de derivação.

Agora há 4 *Funções de Rede* :

$$\begin{array}{cc} Y_1(s) / U_1(s) & Y_1(s) / U_2(s) \\ Y_2(s) / U_1(s) & Y_2(s) / U_2(s) \end{array}$$

A *equação característica* é:

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & a_{12}s + b_{12} \\ a_{21}s + b_{21} & a_{22}s + b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Procedimento para a obtenção da Função de Rede

- 1- Escrever a equação do circuito
(relação **entrada-saída** entre **$y(t)$** e **$u(t)$**)
 - *Equação diferencial ordinária*
 - *Equação íntegro-diferencial*
 - *Sistema de equações diferenciais*
- 2- Aplicar **Laplace** com condições iniciais nulas
- 3- Resolver com relação a **$Y(s)$**
- 4- Determinar a relação: **$Y(s)$** / **$U(s)$**

TEOREMA DO VALOR INICIAL

Se $F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$, vale

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)] = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+)$$

TEOREMA DO VALOR FINAL

Se $F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$, vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Nota:

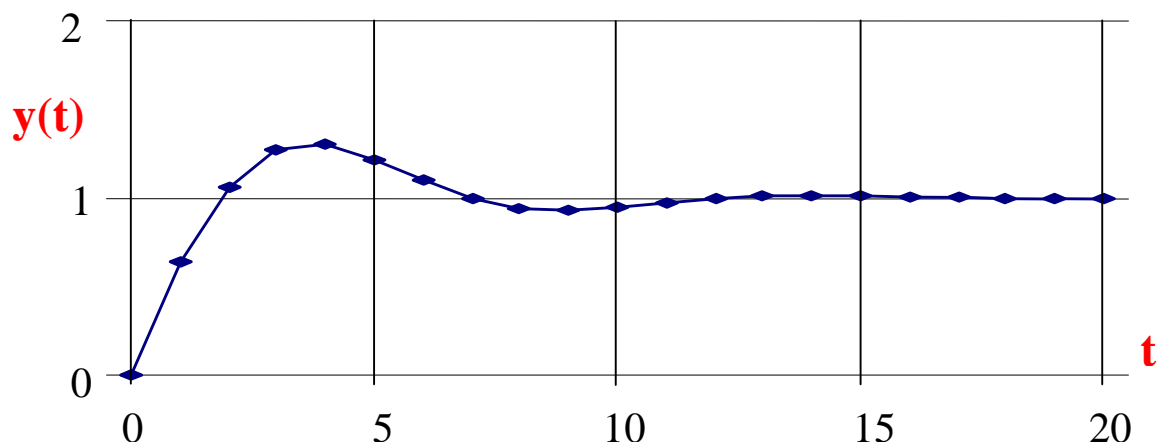
Os dois teoremas são *fracos!* Só valem se existirem os limites indicados!

Exemplo dos Teoremas dos valores inicial e final

$t := 0, 0.05, 20$

$$Y(s) := \frac{s^2 + 3s + 2}{s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s}$$

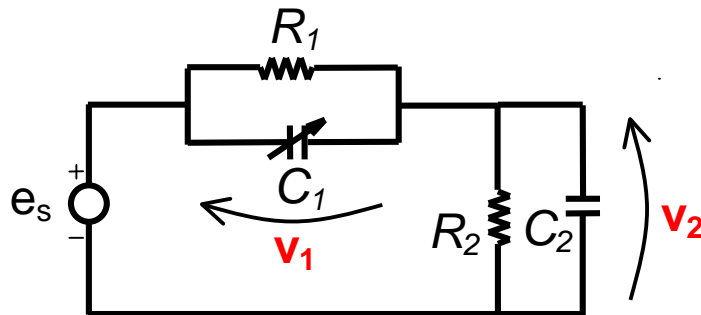
$$y(t) := 1 - 0,11 \cdot \exp(-4,4 \cdot t) - 0,89 \cdot \exp(-0,29 \cdot t) \cdot \cos(0,61 \cdot t) + 0,44 \cdot \exp(-0,29 \cdot t) \cdot \text{sen}(0,61 \cdot t)$$



$$y(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = 1$$

Exemplo de Circuito Redutível



$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} + G_1 v_1 - C_2 \frac{dv_2}{dt} - G_2 v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = e_s \end{cases}$$

(1ª. L.K.)

(2a. L.K.)

Em Laplace:

$$\begin{bmatrix} s C_1 + G_1 & -(s C_2 + G_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 v_{10} - C_2 v_{20} \\ E_s(s) \end{bmatrix}$$

$D(s) \rightarrow$ polinômio característico

$D(s) = 0 \rightarrow$ equação característica

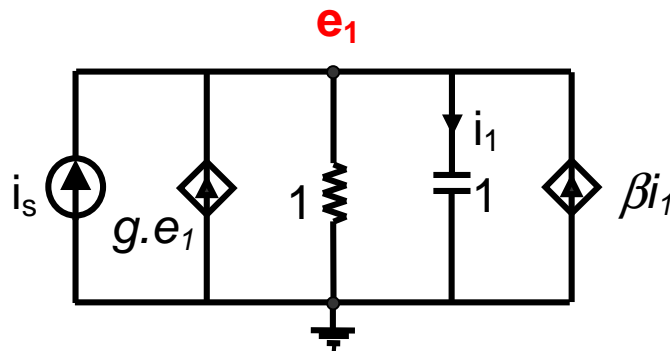
$$D(s) = s (C_1 + C_2) + G_1 + G_2$$

2 elementos armazenadores de energia

1 só pólo :

$$s_1 = -\frac{(G_1 + G_2)}{(C_1 + C_2)}$$

Exemplo de Circuito Degenerado



1ª. L. K. :

$$-g \cdot e_1 + e_1 + \frac{de_1}{dt} - \beta \frac{de_1}{dt} = i_s$$

$$\left[(1 - \beta) \frac{de_1}{dt} + (1 - g) e_1 \right] = i_s$$

Em Laplace:

$$[(1 - \beta) s + (1 - g)] E_1(s) = I_s(s) + (1 - \beta) \cdot e_1(0_-)$$

⇒

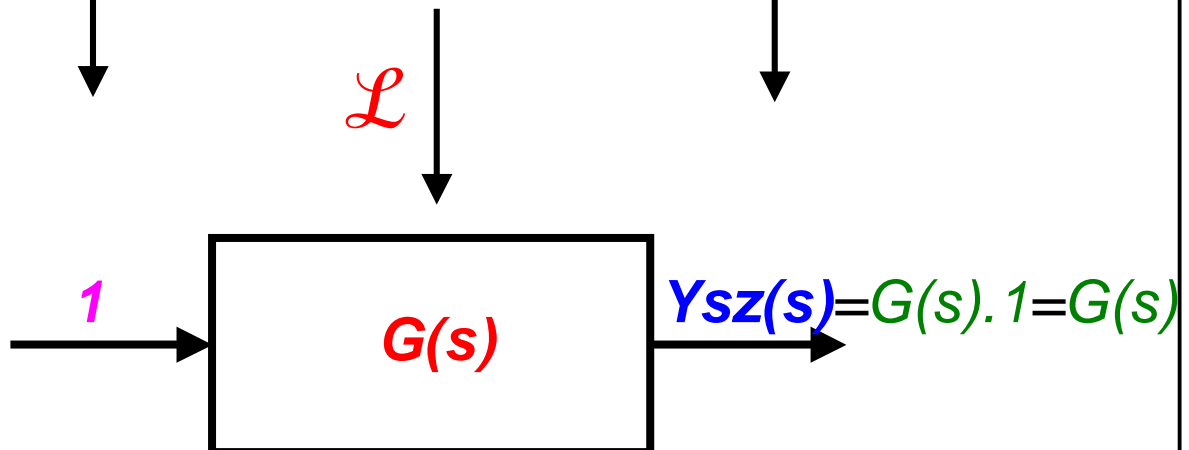
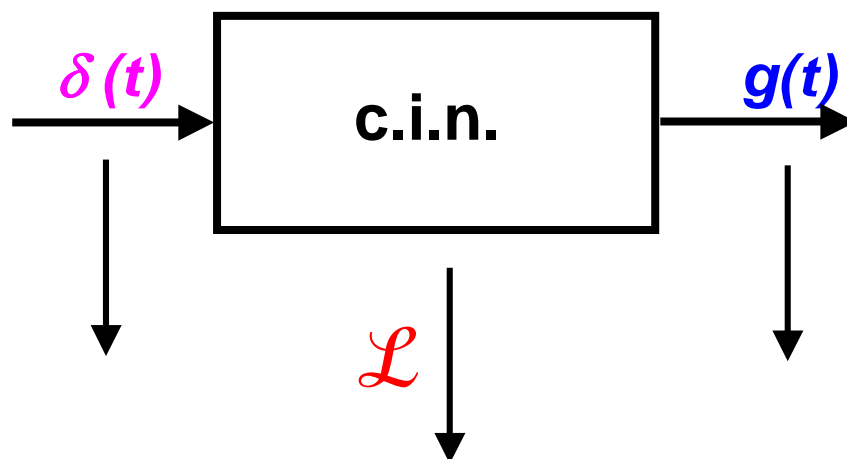
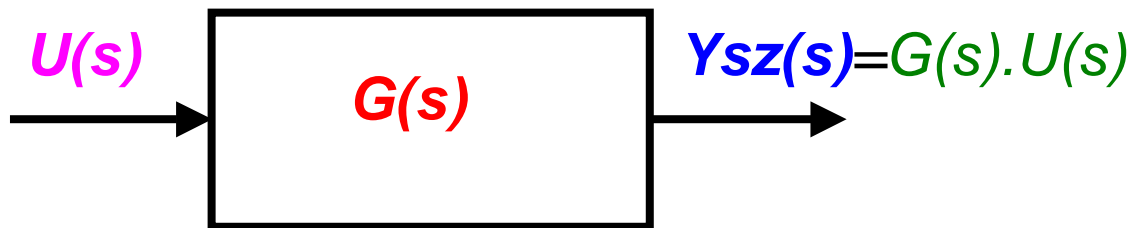
$$E_1(s) = \frac{I_s(s)}{[(1 - \beta) s + (1 - g)]} + \frac{(1 - \beta) \cdot e_1(0_-)}{[(1 - \beta) s + (1 - g)]}$$

$$D(s) = (1 - \beta) s + (1 - g)$$

Para $\beta = 1$ e $g = 1 \Rightarrow D(s) = 0$

Se $I_s(s) = 0 \Rightarrow \infty$ soluções

FUNÇÃO DE REDE E RESPOSTA IMPULSIVA



$$\Rightarrow g(t) = \text{resposta impulsiva} = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, definidas em $(-\infty, \infty)$

Convolução : $(f_1 * f_2)(t)$ ou $f_1(t) * f_2(t)$

$$f_3(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \cdot f_2(t - \lambda) d\lambda$$

onde

t = variável "externa"

λ = variável "interna", ou de integração

Para funções causais (nulas para $t < 0$) :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) \cdot f_2(t - \lambda) d\lambda$$

Ver : www.jhu.edu/~signals/

PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

a) *COMUTATIVA*

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

b) *DISTRIBUTIVA*

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

c) *ASSOCIATIVA*

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) = f_1 * f_2 * f_3$$

d) *ELEMENTO IDENTIDADE*

$$\delta(t), \text{ pois } f_1(t) * \delta(t) = f_1(t)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA CONVOLUÇÃO

Se forem

$$S_1(s) = \mathcal{L} [s_1(t)]$$

$$S_2(s) = \mathcal{L} [s_2(t)]$$

valem:

$$\mathcal{L} [s_1(t) * s_2(t)] = S_1(s) \cdot S_2(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [S_1(s) \cdot S_2(s)] = s_1(t) * s_2(t)$$

**A transformação de Laplace transforma
a convolução em produto!**

RESPOSTA IMPULSIVA

$g(t) \rightarrow$ Resposta da rede ao impulso unitário em c.i.n.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)]$$

Resposta da rede (em c.i.n.) a qualquer excitação $u(t)$:

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

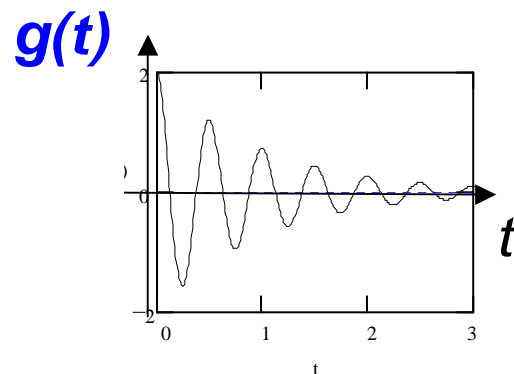
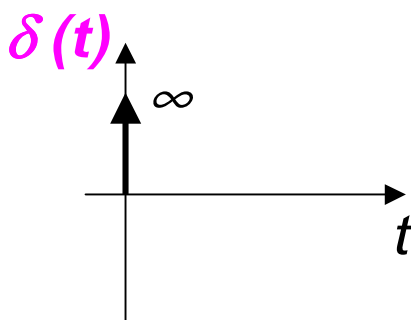
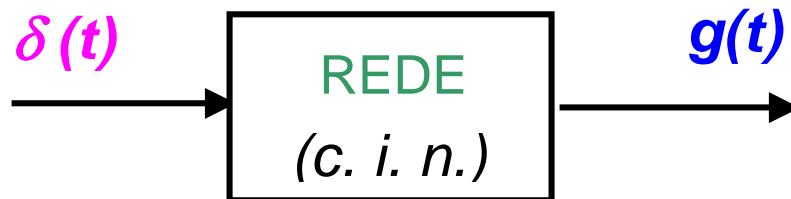
ou

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s) \cdot U(s)]$$

$y(t) \rightarrow$ resposta **forçada** ou resposta em **estado zero** da rede

RESPOSTA IMPULSIVA

É a resposta de uma rede excitada por um **impulso unitário**, a partir de **condições iniciais nulas**:

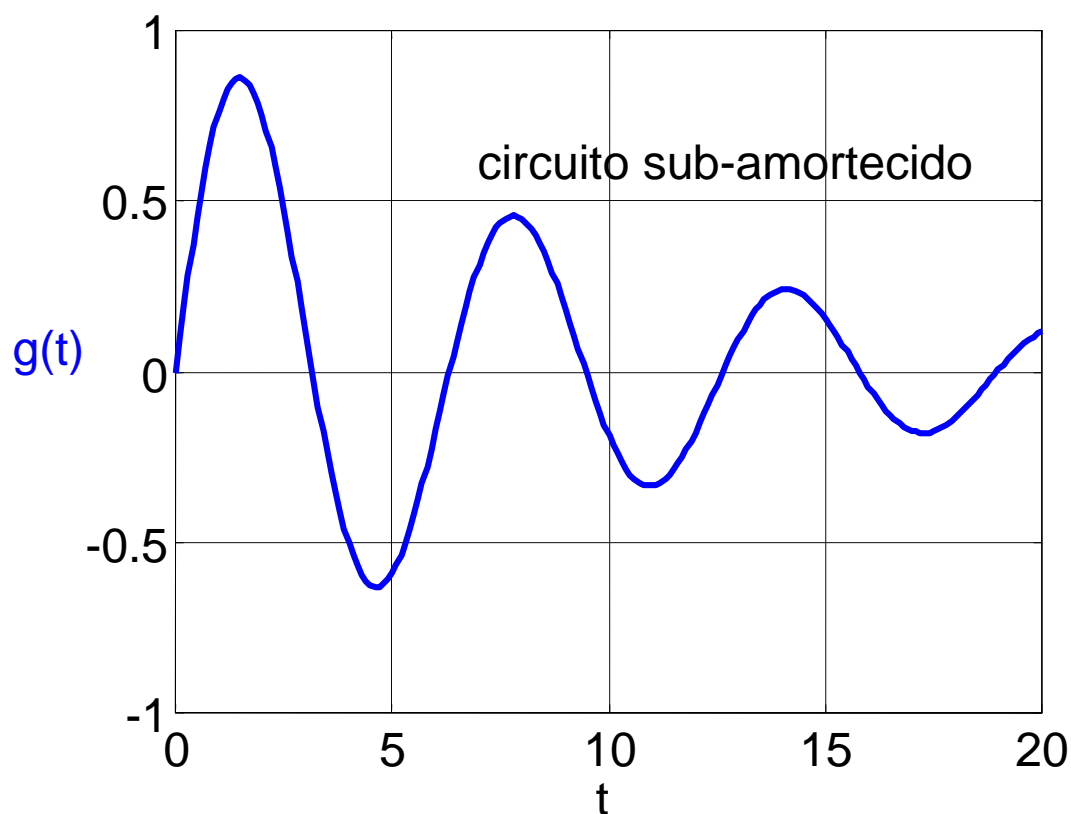


Resposta Impulsiva de um circuito sub-amortecido (oscilatório)

$$\alpha = 0,1 \text{ seg}^{-1} \quad \text{e} \quad \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$g(t) = 1,005 \cdot \exp(-0,1 \cdot t) \cdot \text{sen}(0,995 \cdot t)$$

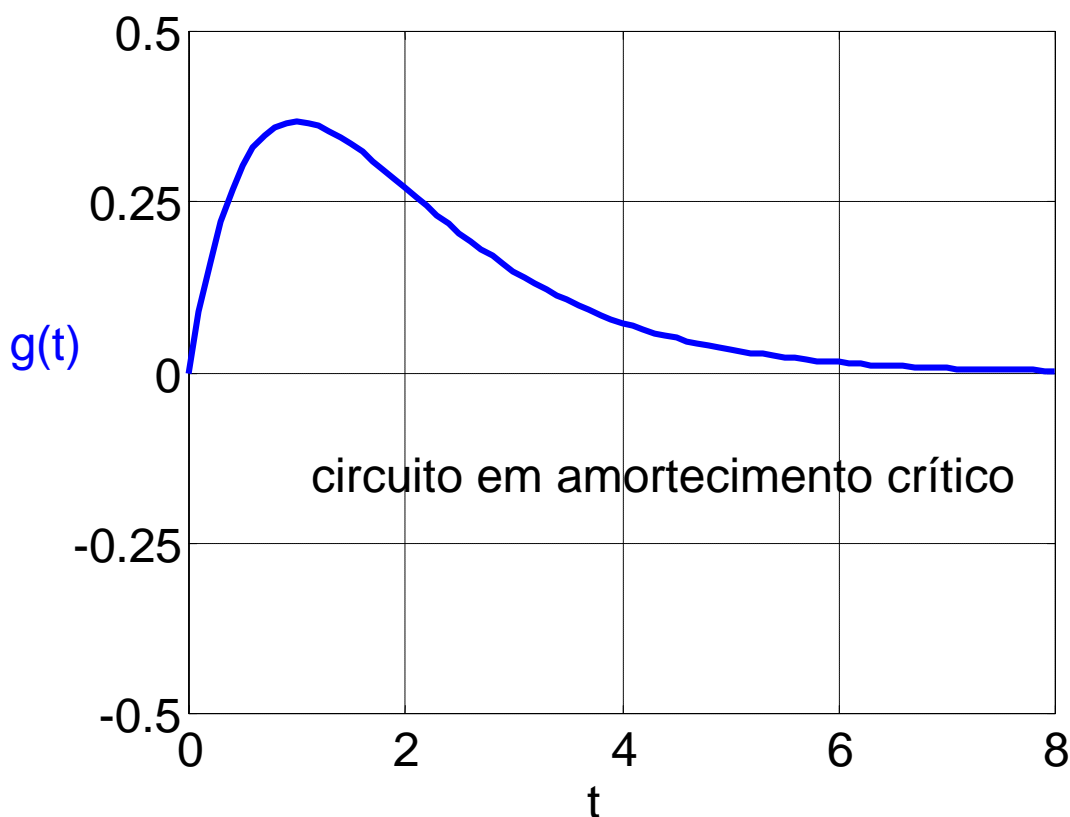


Resposta Impulsiva de um circuito em amortecimento crítico

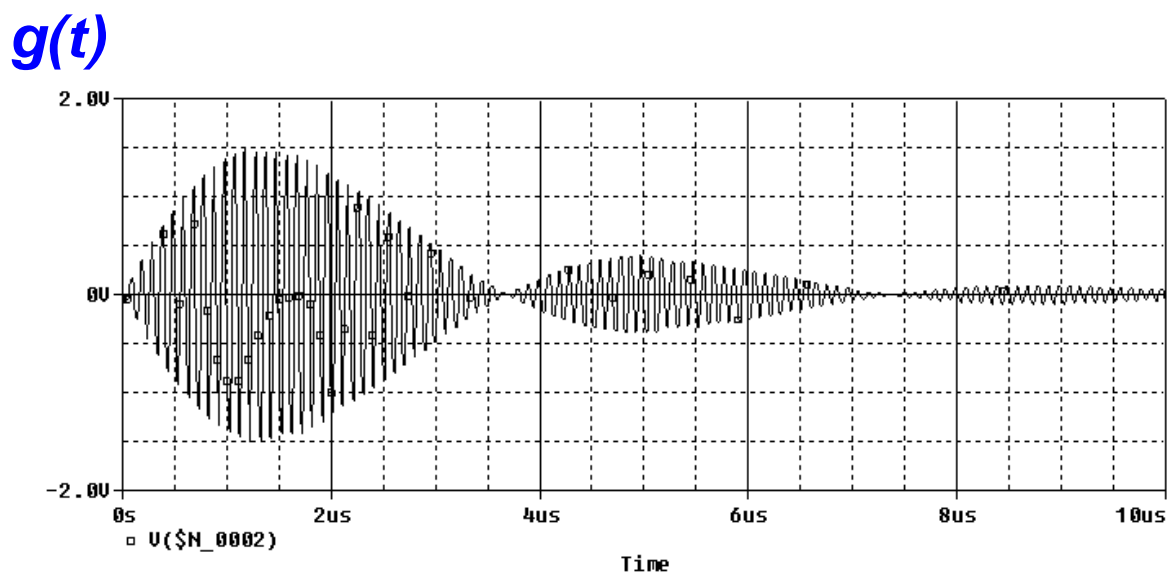
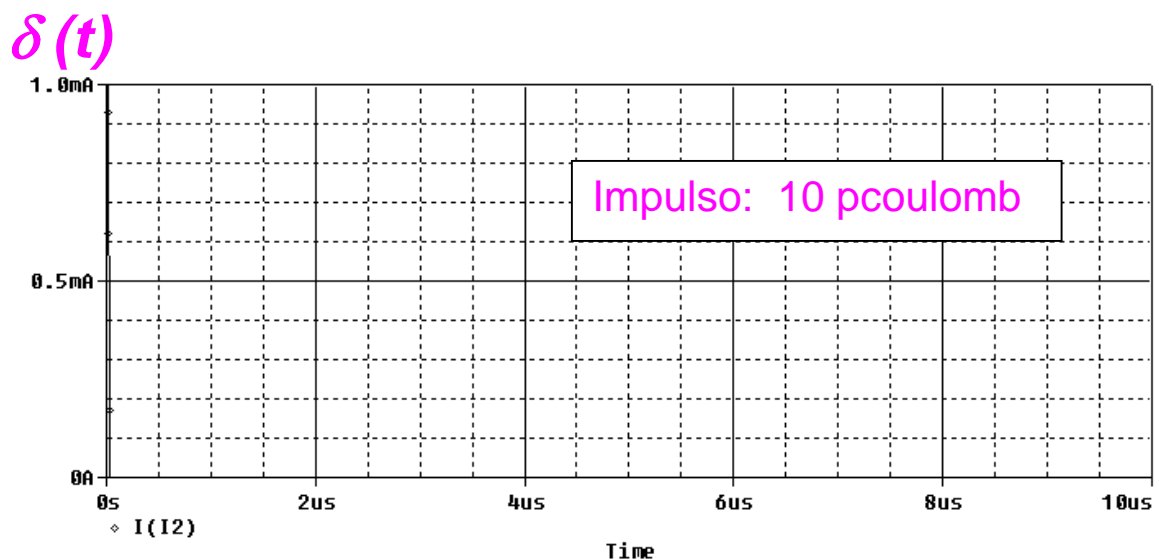
$$\alpha = 1 \text{ seg}^{-1} \text{ e } \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$g(t) = t \cdot \exp(-t)$$



Resposta Impulsiva de um transformador ressonante (4 FCPs complexas)



FUNÇÃO DE REDE

$$G(s) = Y(s) / U(s) \quad |_{\text{c.i.n.}}$$

$$G(s) = Y_{sz} / U(s)$$

$$G(s) = \mathcal{L} [g (t)]$$

RESPOSTA IMPULSIVA

$$y (t) \text{ para } u(t) = \delta (t) \quad |_{\text{c.i.n.}}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G (s)]$$

RESPOSTA EM ESTADO ZERO

$$y_{sz}(t) = g (t) * u (t)$$

$$y_{sz}(t) = \mathcal{L}^{-1} [G (s) . U (s)]$$

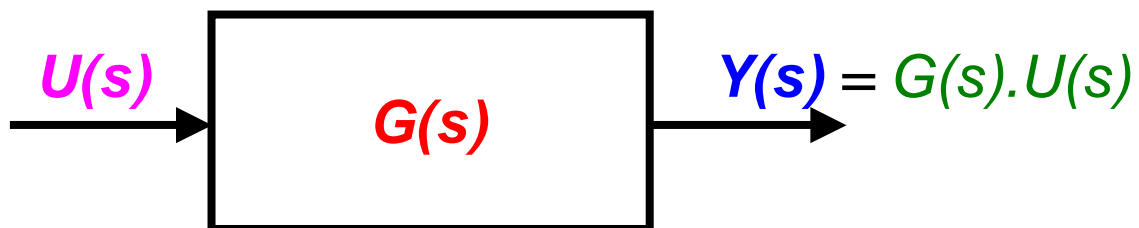
RESPOSTA COMPLETA

Estado zero (forçada) +
Entrada zero (livre)

OU

Transitória + Permanente

FUNÇÃO DE REDE E REGIME PERMANENTE SENOIDAL



FUNÇÃO DE REDE : $G(s) = Y(s) / U(s) \mid_{\text{c.i.n.}}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s) . U(s)]$$

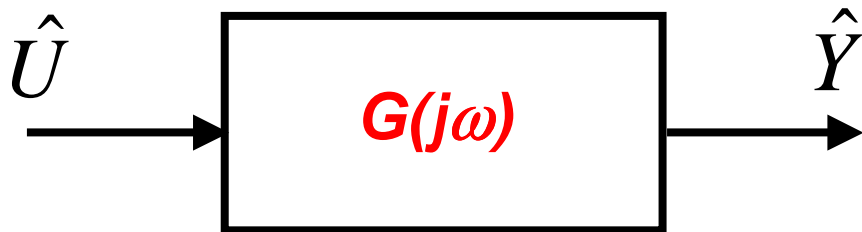


**resposta forçada (transitório +
permanente)**

FUNÇÃO DE REDE E REGIME PERMANENTE SENOIDAL

TEOREMA IMPORTANTE:

RPS $s \rightarrow j\omega$



$$G(j\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

$$\hat{Y} = G(j\omega) \cdot \hat{U}$$

$$y(t) = \text{Re}[\hat{Y} \cdot e^{j\omega t}]$$



resposta permanente

Cálculo da Resposta em **R**egime **P**ermanente **S**enoidal

- Excitação senoidal com frequência ω
- Todos os transitórios decaem a zero
- Na expressão $\mathbf{G(s)} = \mathbf{Y(s)} / \mathbf{U (s)}$ substituir:

$$U(s) \text{ por } \hat{U}$$

$$Y(s) \text{ por } \hat{Y}$$

$$G(s) \text{ por } G(j\omega)$$

\hat{Y} será o **fasor** da resposta em
R.P.S. do circuito

Função de Rede e Regime Permanente Senoidal

$$G(j\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

Função complexa

Pode ser representada por duas curvas:

1- Curva de **Resposta em frequência**

2- Curva

$$M(\omega) = |G(j\omega)| \times \omega$$

$$\phi(\omega) = \arg[G(j\omega)] \times \omega$$

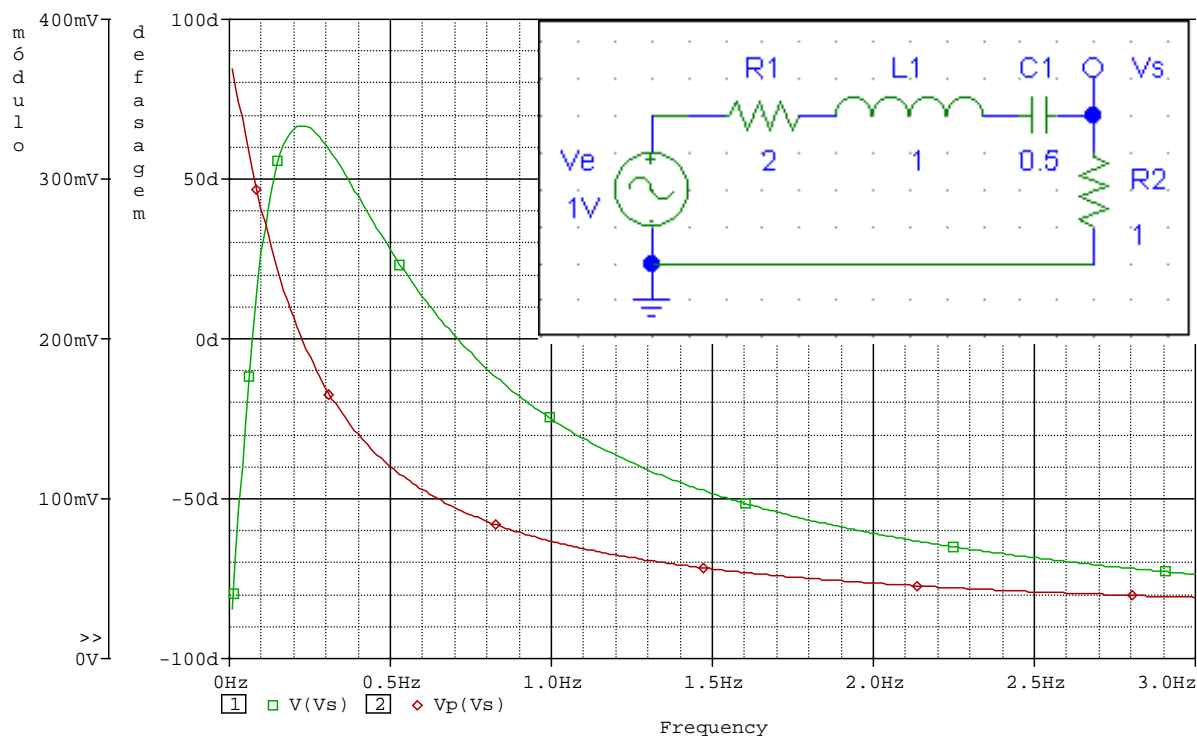
$$G(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Função de Rede e Regime Permanente Senoidal

Exemplo – Circuito de 2ª. ordem

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{2 - \omega^2 + 3j\omega}$$



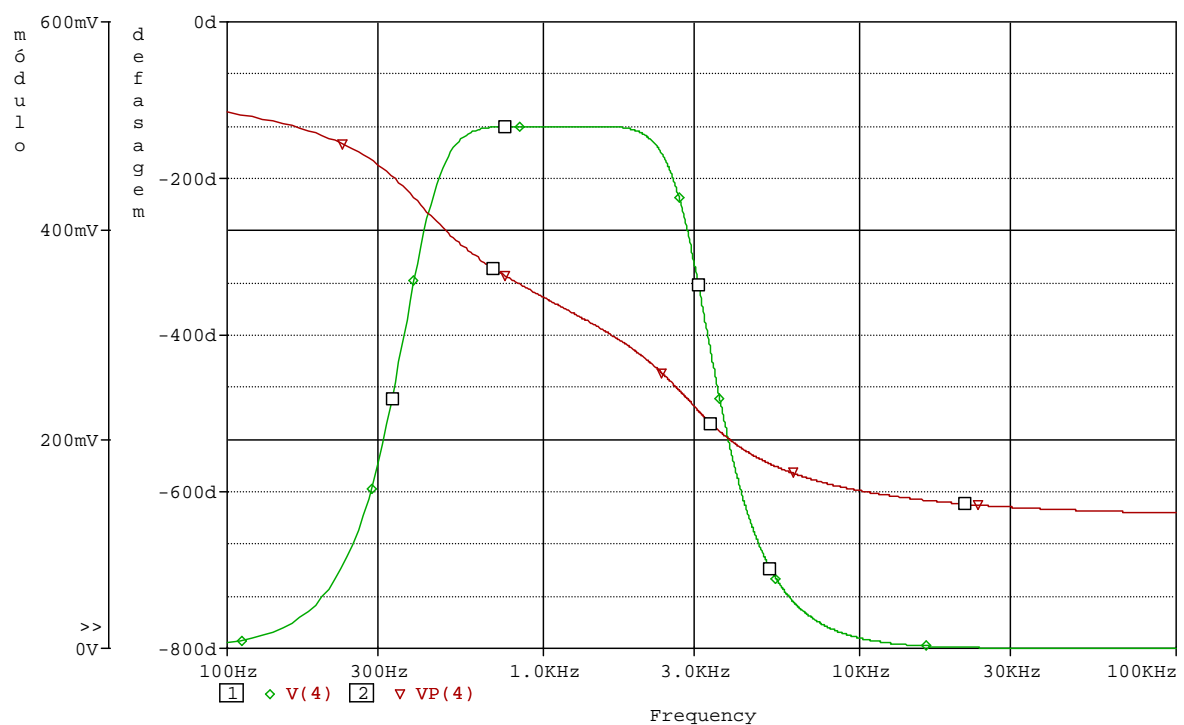
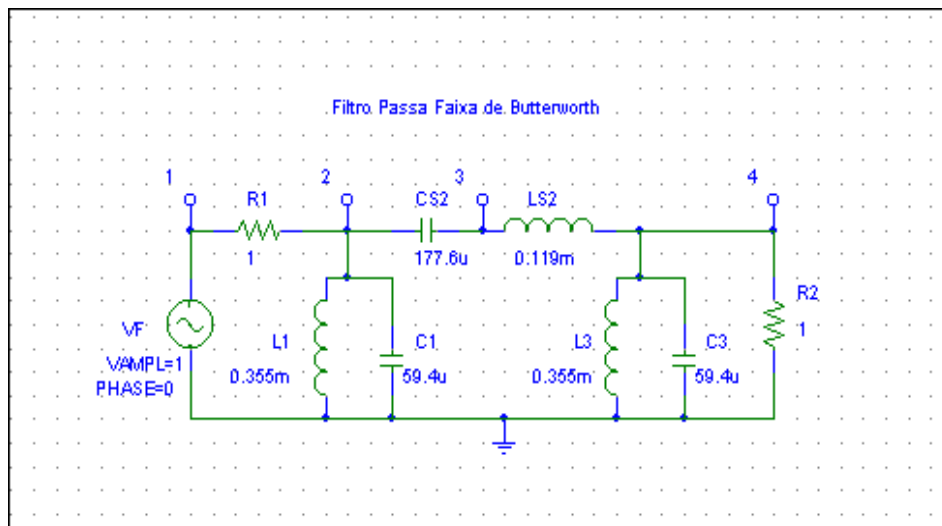
$M(\omega)$

e

$\phi(\omega)$

Função de Rede e Regime Permanente Senoidal

Exemplo - Filtro Passa-Faixa

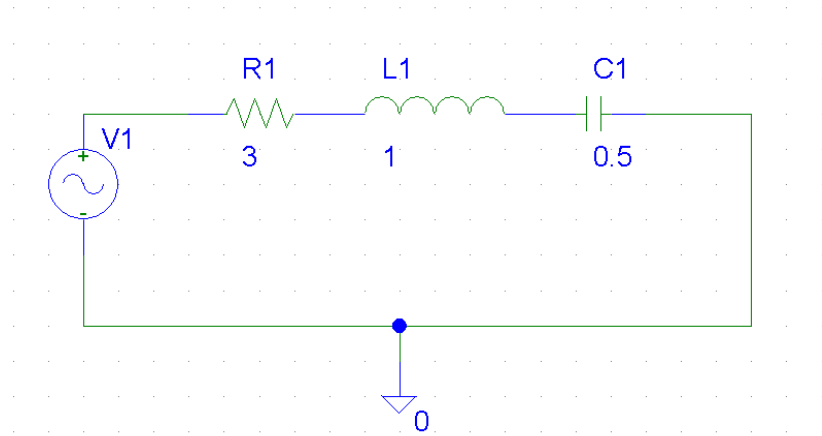


$M(\omega)$

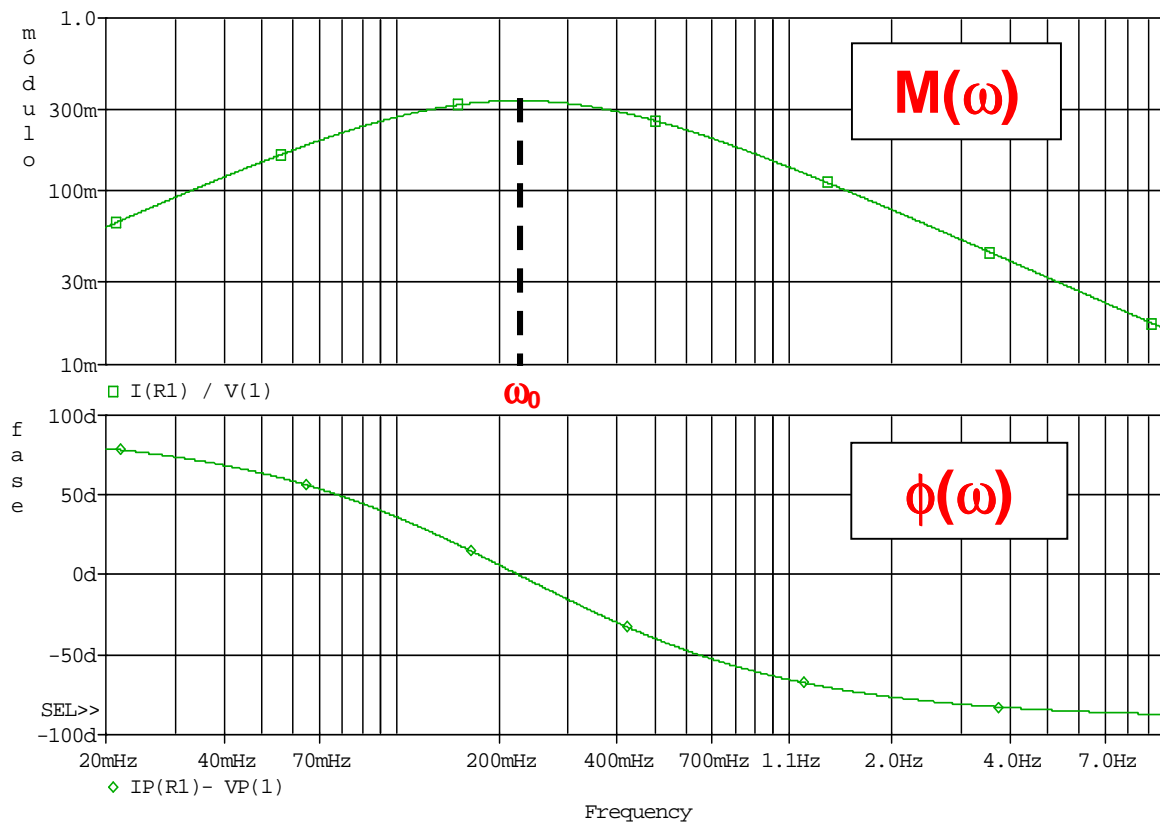
e

$\phi(\omega)$

Função de Rede e Resposta em Frequência



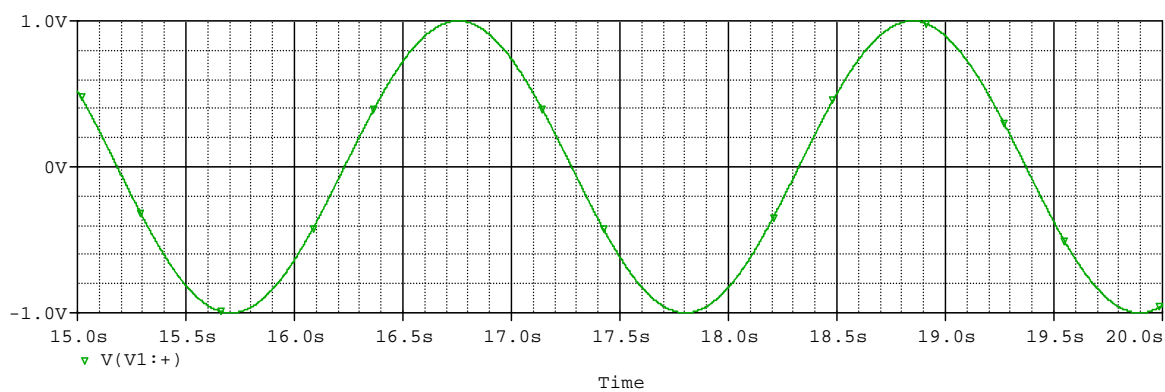
Filtro Passa-Faixa



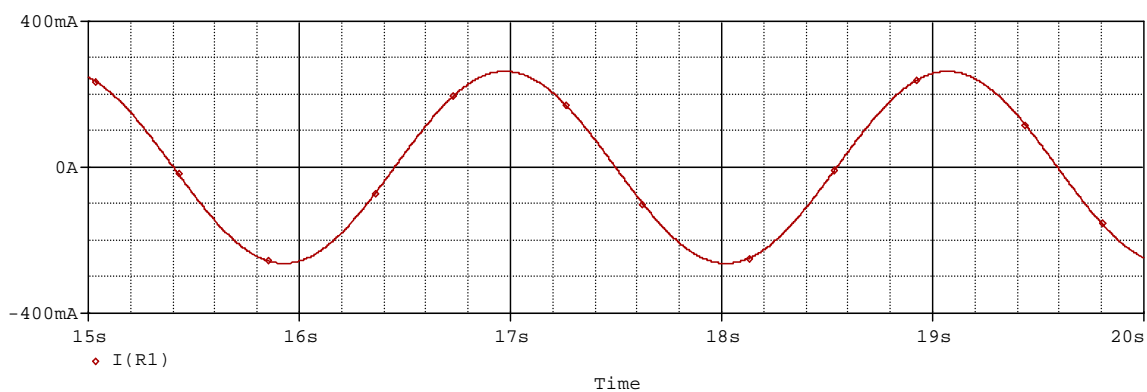
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,41 \text{ rad / s}$$

Função de Rede e Regime Permanente

Entrada : $e_s(t) = \cos(3t)$

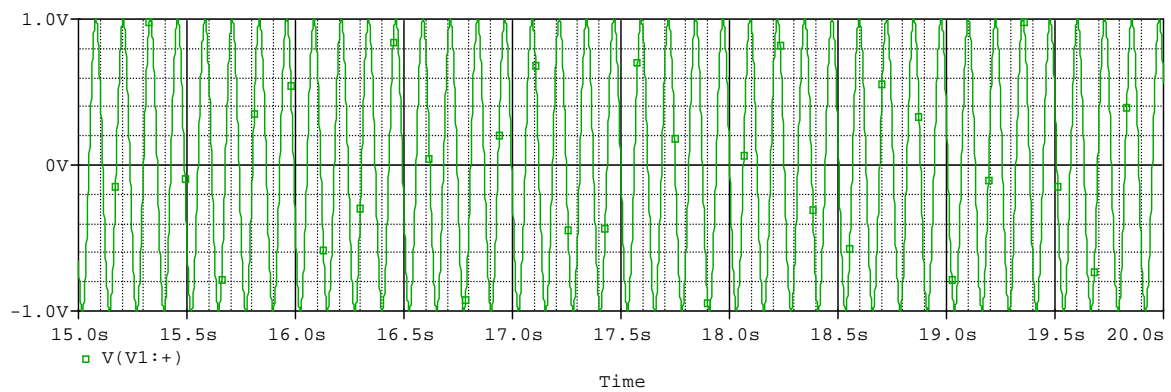


Saída :

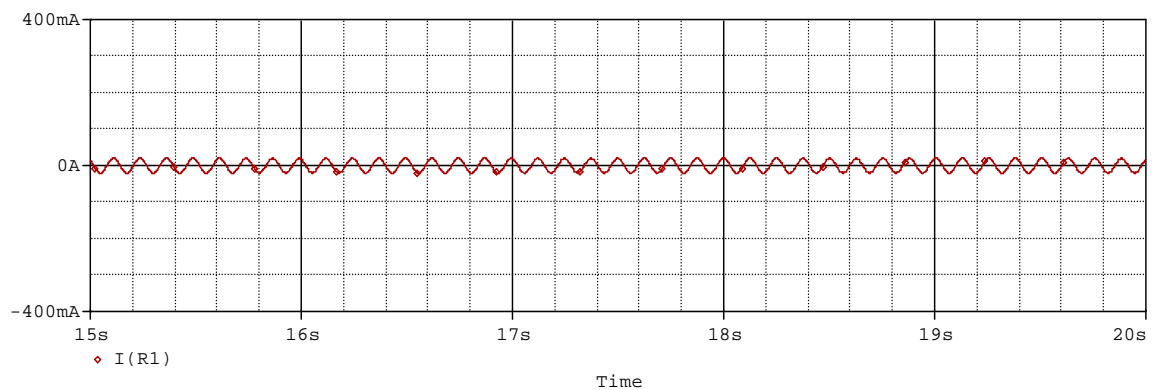


Função de Rede e Regime Permanente

Entrada : $e_s(t) = \cos(50 t)$

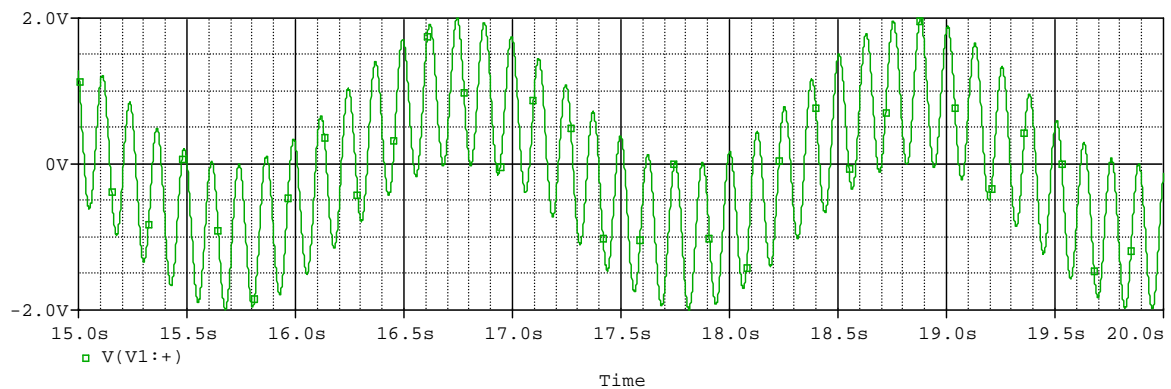


Saída :

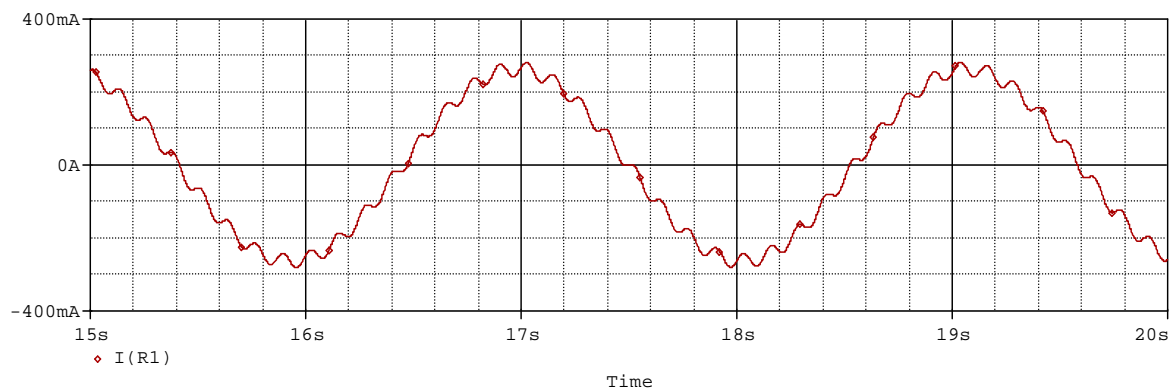


Função de Rede e Regime Permanente

Entrada: $e_s(t) = \cos(3 t) + \cos(50 t)$

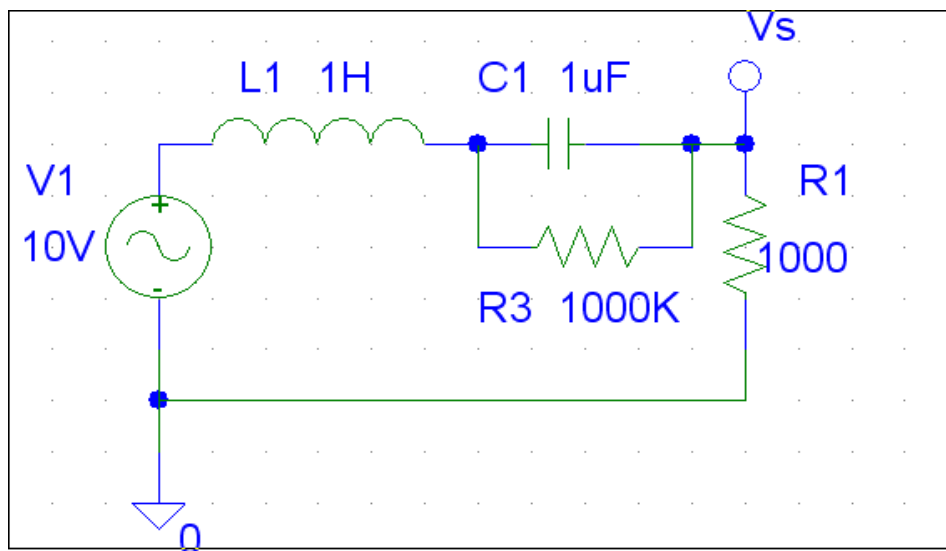


Saída :



Função de Rede e Regime Permanente

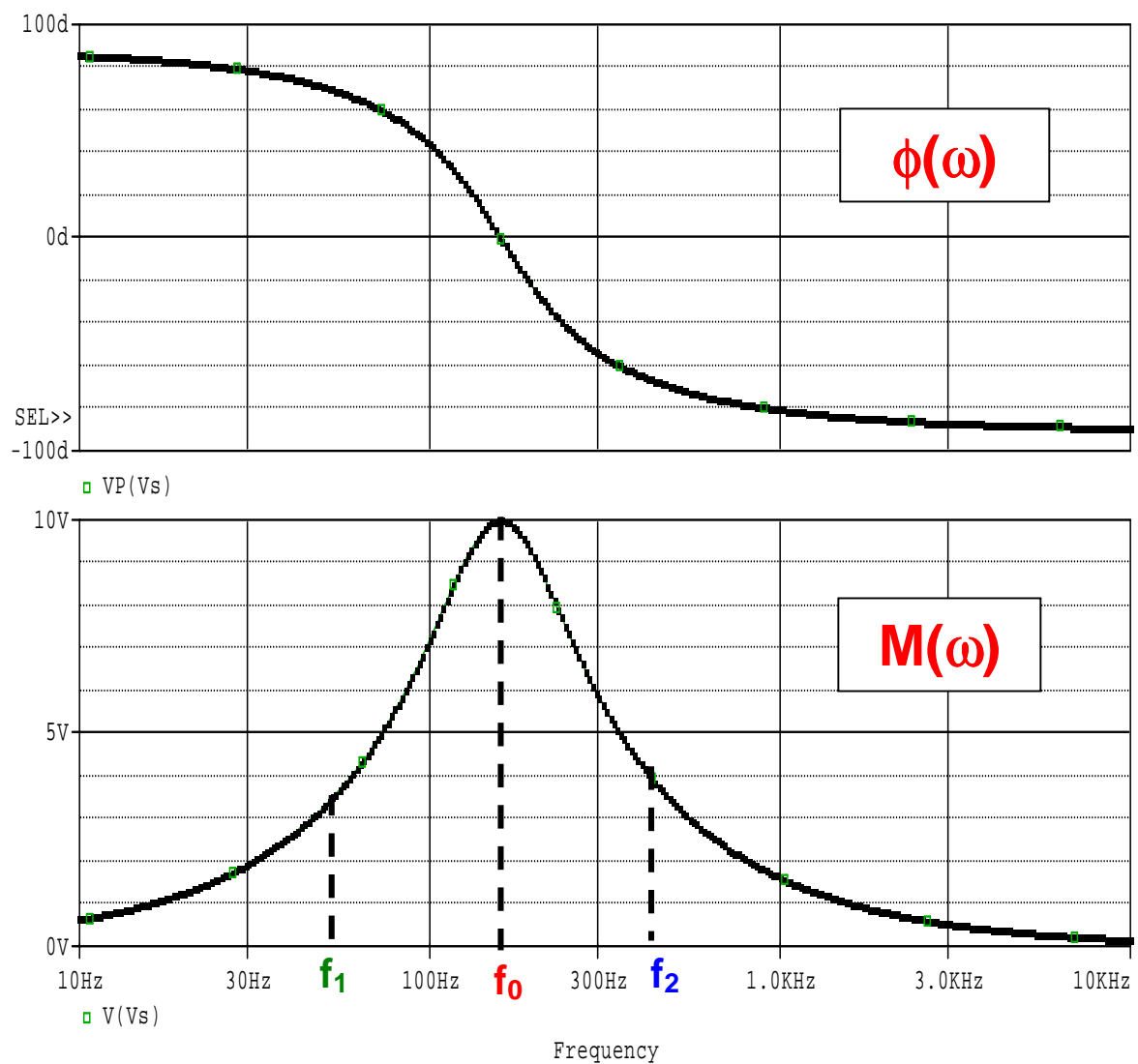
Exemplo de Circuito de 2ª. Ordem



Função de transferência

$$G(s) = \frac{V_s(s)}{V_1(s)} = \frac{R_1}{sL_1 + R_1 + \frac{sC_1R_3}{sC_1 + R_3}}$$

Gráficos da Resposta em Frequência $G(j\omega)$ obtidos com o PSPICE

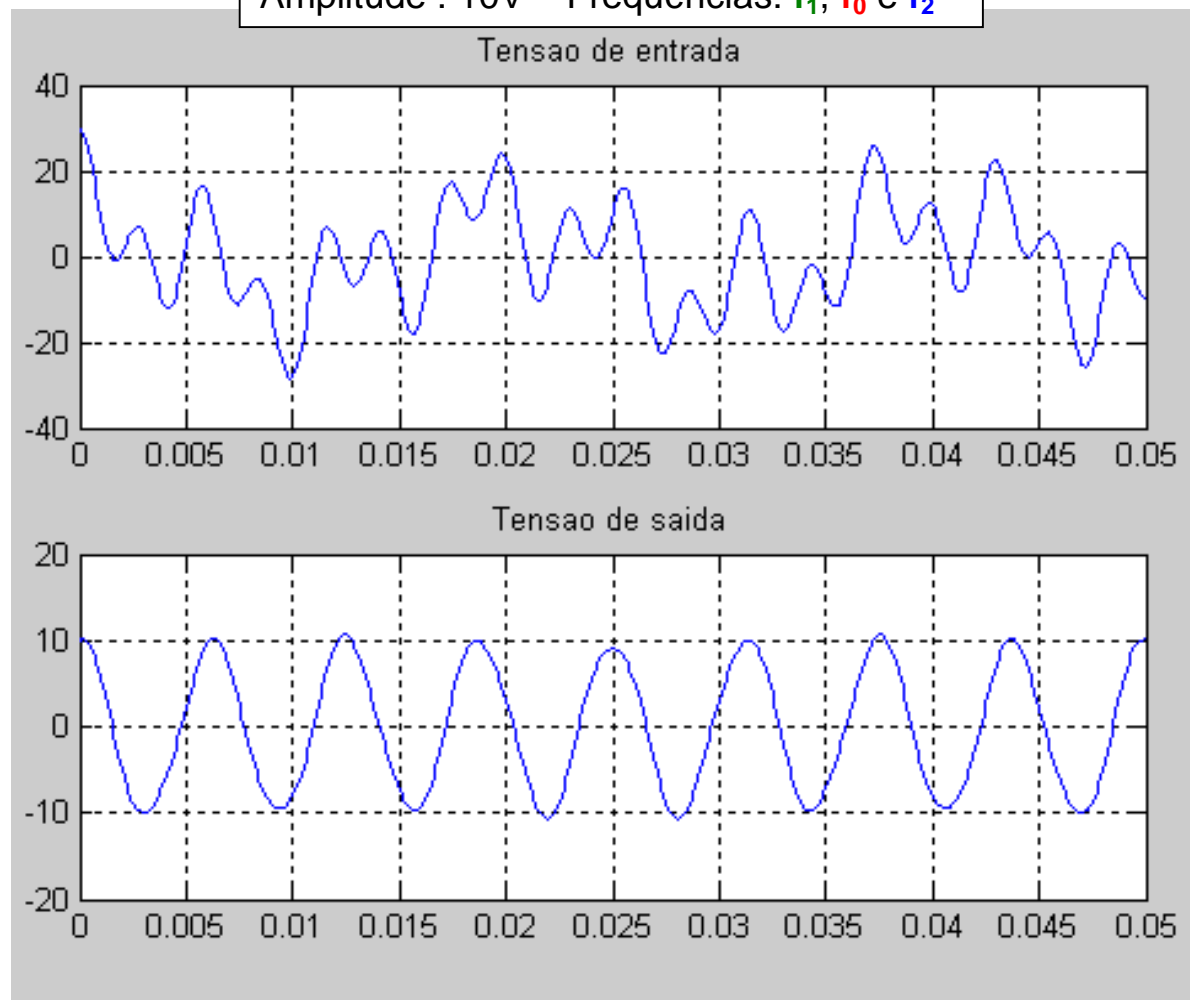


$$f_0 \approx 160 \text{ Hz}$$

Programa em Matlab para construção dos gráficos de entrada e saída

```
%arq. resperm.m (30/11/08)
t=0:0.0001:0.05;
pi=3.1416;
v1=10*cos(100*pi*t)+10*cos(320*pi*t)+10*cos(700*pi*t);
v2=0.3*cos(100*pi*t+0.5*pi)+10*cos(320*pi*t)+0.6*cos(700*pi*t-pi/2);
subplot(2,1,1)
plot(t,v1), grid on, title('Tensao de entrada')
subplot(2,1,2)
grid on
plot(t,v2), grid on, title('Tensao de saida')
```

Entrada : Composição de 3 co-senóides
Amplitude : 10V – Frequências: f_1 , f_0 e f_2



Saída \approx co-senóide
Amplitude : 10V – Frequência f_0
Efeito de Filtragem !